浙江大学

硕士学位论文

论文题目：有理 **Bézier** 极小曲面设计**:**

有限差分法

作者姓名：苏 盼

指导教师：王国瑾 教授

专业名称：应用数学

培养单位：浙江大学数学系

论文提交日期 **2010** 年 **5** 月

浙　江　大 学
申请硕士学位论文

有理**Bézier**极小曲面设计:有限差分法

作者**:**苏 盼

学科专业**:**计算机辅助几何设计与计算机图形学

指导老师**:**王国瑾 教授

浙江大学数学系

浙江大学图形图像研究所

2010年5月

Design of Rational Bézier Minimal Surface: Finite difference method

By

Pan Su

(Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics)

A Thesis Presented to

The Graduated School of Zhejiang University

in Partial Fulfillment of the Requirements for the

Degree of Master of Science

Thesis Supervisor: Professor Guojin Wang

Department of Mathematics

Institute of Computer Graphics and Image Processing

Zhejiang University

Hangzhou, P.R. China

May, 2010

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作和取得的研究成果，除了文中特别加以标注和致谢之处外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得浙江大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料. 与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意.

学位论文作者签名：　　　　签字日期：　　　年　　月　　日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有关保留、使用学位论文的规定. 特授权浙江大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，并采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编以供查阅和借阅. 同意学校向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘.

（保密的学位论文在解密后适用本授权说明）

学位论文作者签名：　　　　　　　　导师签名：

签字日期：　　年　　月　　日　　　　签字日期：　　　年　　月　　日

目录

摘要

本文首先简要地回顾了极小曲面问题(*Plateau* 问题)的产生和沿革，综述了目前在CAGD 领域内 Bézier 极小曲面造型的主要方法，如 Dirichlet 泛函方法，离散的 Mask 方法等. 这些方法是基于以下结论：等温正则参数曲面是极小曲面的充要条件是其为调和曲面. 虽然这些研究取得了一些很好的结果，但是由于 Bézier 曲面不能精确表示除抛物面外的二次曲面, 只能给出近似表示. 而有理 Bézier 曲面能克服这一缺陷，所以研究有理 Bézier 曲面造型具有实际意义. 基于此本文进一步指出了研究空间闭曲线所围成的 *Plateau* -Rational-Bézier 曲面造型的必要性和合理性. 本文基于分而治之的思想，利用有限差分法来研究有理 Bézier 极小曲面造型问题.本文的主要贡献与创新点可以概括为以下几点：

1. 在 CAGD 领域对于有理 Bézier 极小曲面造型问题进行了成功的尝试，使得统一研究任意次的有理Bézier极小曲面造型成为可能，这将促进CAD行业能够在NURBS 系统中计算与绘制极小曲面,有望对建筑、机械等工程实际产生深远影响.
2. 将 Bézier 调和曲面的研究推广到有理形式. 由于有理 Bézier 曲面的复杂形式，本文中没有直接应用 Bézier 调和曲面的求解模式来做，而是采用了分而治之的思想. 利用有限差分法将有理 Bézier 调和曲面的造型问题转化为求解一个线性方程组，其可应用到任意阶的有理 Bézier 调和曲面造型问题, 其求解过程与低阶情形一样都是求解一个线性方程组.
3. 把上述给定控制边界求解有理 Bézier 调和曲面的想法加以编程实现，通过实例加以验证，说明用有限差分法求解得到的一类有理 Bézier 调和曲面最接近于有理 Bézier 极小曲面. 另一面，为了从客观上对曲面加以细致分析比较，本文给出了其曲面的绝对平均曲率图.

关键词： 极小曲面， 有理 Bézier 曲面，Plateau-Rational-Bézier 问题，Dirichlet 能量函数，调和曲面，等温参数曲面，有限差分方法.

Abstract

To begin with, we briefly retrospect the birth and the evolution of the minimal surface problem (Plateau Problem) with prescribed border, and in addition we comprehensively introduce some important methods, for example, Dirichlet functional method and discrete Mask method and so on, of recent researches on Bézier minimal surface modeling in the field of CAGD. These methods are based on the following conclusion that for isothermal regular parametric surface, it is a minimal surface if and only if this is a harmonic surface. Although these studies have some good results, Bézier surface can not be accurately but approximatively expressed for quadric in addition to paraboloid. It is well-known that rational Bézier surface can be accurately expressed for not only paraboloid but also for quadric. Furthermore, we point out that it is necessary and reasonable for us to study *Plateau* -Rational-Bézier surface modeling surrounded by the closed curve problem . Based on the idea of "dividing and conquering", we apply the method of finite difference method to study the problem of rational Bézier minimal surface modeling. The most important contributions and innovations of this thesis can be summed up as follows:

1. We successfully attempt to solve the rational Bézier surfaces modeling problem, which make it possible for us to study arbitrary harmonic rational Bézier surfaces modeling. Hence, it will promote the field of CAD to use the NURBS system to draw and compute minimal surface, which will have a profound influence on some fields of engineering, such as construction and mechanism.
2. We extend the geometric design on the surface of Bézier harmonic to the rational form. Owing to the complicated form of rational Bézier surfaces, we don't directly apply the solution to harmonic Bézier surface modeling, but we can adopt the dividing and conquering approach. We transform the problem of rational Bézier surfaces modeling into solving linear equations. This method can be applied to arbitrary order of the rational Bézier surfaces modeling problem, which is the same with low-level case by solving a linear equations.
3. We implement the algorithm of solving the harmonic rational Bézier surface for given control borders and verify this algorithm by several examples in order to explain that a class of rational Bézier harmonic surface ,obtained by finite difference method, is the closest to the rational Bézier minimal surface. On the other hand, in order to objectively analysis and

compare the surfaces, we give their absolute mean curvature maps.

Keywords: minimal surface, Rational Bézier surface, Plateau-Rational-Bézier problem, Dirichlet energy function, Harmonic Surfaces, Isothermal parameter surface, Finite difference method.

第一章 绪论

§1.1 极小曲面的提出及研究

在我们的孩童时代，很平常的游戏就是吹肥皂泡.吹肥皂泡是一种古老的娱乐方式，甚至一个藏于罗浮宫的古伊顿花瓶上也会有吹肥皂泡的儿童画像. 今可购得特制的泡沫溶液，并带有一个连带手柄的简单的金属丝架或塑料架子，把这种架子浸入溶液，然后沾起一点，类似圆盘形状的肥皂膜就形成了，向架子吹气，就产生肥皂泡. 如果用细的易弯曲的金属丝做成更复杂的几何形状的架子以替代圆形架子，则会出现更加神奇的效果.由于光的波动性，肥皂膜会因干涉效应而导致彩虹色，但瞬息后由于薄膜太薄，七彩色便看不到了.肥皂膜实验中出现的诱人薄膜，显然是处于稳定平衡状态，那么按照约翰.伯努利的虚功原理[Langrange,1788]，称其为极小势能膜.因势能正比于面积，由肥皂膜造型的数学曲面是面积最小的曲面. 极小曲面的面积比跨在同一架子上而形成的任何邻近曲面的面积都小. 肥皂膜及其数学模型的奇异形状直观可见，也使得很多数学家对极小原理十分感兴趣[Stefan Hildebrandt,2004]. 那么我们从数学上应当怎样来描述这样的曲面呢？这种曲面有哪些好的性质？这种曲面在工程造型中有应用价值吗？数学家们对此的研究状况又如何？

数学家们称上述薄膜曲面为极小曲面，它是所有给定特定边界中面积最小的曲面. 极小曲面简单说就是平均曲率为零的曲面.在这里平均曲率(*mean curvature*)是微分几何中一个“外在的”弯曲测量标准，局部地描述了一个曲面嵌入周围空间（比如二维曲面嵌入三维欧几里得空间）的曲率.这个概念由索菲.热尔曼在她的著作《弹性理论》中最先引入[Germain ,1831]. 平均曲率定义为 $H=\frac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$，其中 κ_1,κ_2 表示两个主曲率[C. Spivak,1999].

给定空间中的一条可求长(可测) *Jordan* 闭曲线(简单闭曲线,或者称无重点的连续闭曲线),寻找以该闭曲线为边界的曲面,使得该曲面在所有具有相同边界的曲面中,其面积达到最小——这一问题称为极小曲面问题[Nitsche,1988].平面是仅有的极小可展曲面.除平面外，旋转极小曲面都是悬链面[do Carmo,1976]，直纹极小曲面都是正螺面[do Carmo,1976].

极小曲面在物理上解释为“肥皂泡现象”，然而当把圆环扭曲但仍闭合时，极小曲面的形状就不是很明显了[do Carmo,1976].这是从物理层面上对极小曲面的揭示，很多问题都是由于奇异的现象引发的，很多问题都是从直观到抽象的认识.

极小曲面在工程领域有着广泛应用，在符合给定边界条件下求出相应极小曲面是有很大意义的，既满足条件又可以节约材料，在如今资源短缺的时代是十分关键的. 极小曲面问题是微分几何领域一个古老而活跃的主题[Nitsche,1988]. 对这个问题研究最早可以追溯到 17 世纪. 1744 年，瑞士数学家 Euler 导出了变分法的 Euler 方程，发现了某些极小曲面[Euler,1744]. Euler 的方法后来又为法国数学家 *Lagrange* 所发展，*Lagrange* 首先将变分法置于分析的基础上，他充分应用变分法来构筑其分析力学体系，并系统地研究了变分法及其在力学上的应用，全部力学被他化归为一个统一的变分原理——虚功原理[*Lagrange*,1788]. 值得指出的是，*Lagrange* 在 1760 年就已经用变分原理推导出极小曲面应该满足的偏微分方程，称为 $Euler-Lagrange$ 方程[GIL BARG,1983]，该方程是一个拟线性二阶椭圆偏微分方程. 极小曲面的几何意义为曲面的平均曲率等于 0,所以极小曲面就是平均曲率处处为 0 的曲面，除了在有限个点以外，极小曲面的 *Guass* 曲率恒为负，所以极小曲面具有许多优良的性质：其结构稳定，自然光顺，在建筑设计、飞机轮船制造、分子化学、晶体学等各个领域有很重要的应用, 例如，用极小曲面作房顶曲面，结构很稳定，美观大方，特别有不积水的特点[Man,Wang,2001].

早期就有很多研究极小曲面的数学家都致力于寻找该偏微分方程闭形式的解，当然也取得了很多成果：如 *Monge* 等人在 18 世纪末期建立了所谓的 Monge-Legendre 表示[Monge,1794]，19 世纪早期 Scherk 给出了一类极小曲面即 Scherk 曲面, 悬链面和正螺面都是它的特例[do Carmo,1976]，这也是当时知道的仅有的极小曲面.到 19 世纪中后期有很多杰出的数学家包括 Catalan,Weierstrass, Rieman,Enneper,Schwarz, Lie, Ribacour,Beltrami 等都投入到极小曲面的研究中来，得到了极小曲面的 Werestrass-Enneper 表示[do Carmo,1976]. Enneper 给出了第一个多项式参数极小曲面即著名的 Enneper 曲面[do Carmo,1976]. 另外，S.Lie 和 A.Ribacour 首先使用复变数几何的方法研究极小曲面，实曲面和虚曲面的结合对极小曲面理论的发展具有很深远的

意义，使得很多问题可以统一处理. 他们首次比较成功地从理论上解决了极小曲面的偏微分方程解的存在性问题.此时，他们的解不能排除曲面可能存在奇点(即分支点). 接着 Osserman 进一步证明了极小曲面不出现分支点[Osserman,1986]. 然而即使是现在也不能说这一问题得到了很彻底的解决，极小曲面的任何基于几何还是物理上的研究成果都对几何学有着很重要的贡献.

很多数学家对极小曲面这一特殊的曲面十分感兴趣，由此提出了许多有趣而富有挑战的问题. 如果对极小曲面做理想化的物理实验[do Carmo,1976]，这个实验可以描述如下：把一个金属丝环浸入一盆肥皂水中，再把它拿出来后上面便张着一层闪着彩虹的平圆盘形式的薄膜. 任何别的以此圆环为界的曲面，不论是露出皱褶的，还是强烈凸出的，都会有更大的面积. 平圆盘是张在圆周上的皂液膜能表现出的最小曲面，它对应于由圆周决定的极小曲面. 比利时盲人物理学家 $J.A.F$.普拉蒂奥通过不断地实验和研究发现了很多重要成果，他花了多年的时间做这样的液体薄膜实验，思索归纳其明显的形状，并在 1873 年出版了著作《实验和理论流体静力学》[Plateau,1873]: 通过实验断定，神奇的自然界总能找到一种方式来形成皂液膜，使其张在不论如何扭曲的圆环上，在忽略皂液膜重力的情况下，由于表面张力的作用，在固定边界曲线上自然张成的曲面是所有可能的曲面中面积最小的，在数学上我们称它为极小曲面. Plateau 所做的皂液膜实验实际上从物理角度解释是很复杂的.如将圆环浸入同样的肥皂液两次，就会显示出两种不同的形式. 另外，当将圆环旋转一定角度后浸入溶液中多次，每次都会产生不同的皂液膜形式. 哲学家赫拉克利特说：“一个人不可能两次跨过同一条河流”. 这虽然只是一个哲学家的观点，但是的确是这样，很多简单的物理现象，在理论上是很难揭示的. 如人们都知道蜂窝是一种十分美妙的六边形结构，许多科学家认为蜂窝的结构是出于极小原理：蜜蜂建造蜂窝，为了使所花费的蜂蜡尽量少，就要采取最经济的设计方式. 现在的问题就是蜂窝是极小曲面吗？人们经过多年的探索之后也没有给出准确的答案，蜂窝的设计实际上是蜜蜂根据自己的实际需要经过时代的积累与自身进化需要而建成的，在数学理论上很难给出精确地揭示[You,2008].当然，人们根据很多自然界中的物理造型，从中寻求灵感来设计出既美观又实用的建筑.

鉴于 Plateau 的贡献，人们习惯把决定由空间 *Jordan* 曲线张成的拓扑类型为圆盘的极小曲面问题称为 Plateau 问题[M.Struwe,1988]. 该问题早已成为许多学者研究的重要课题. 1865 年，H.A.Schwarz 给出了边界是边长为 1 的正立方体上的四条边构成扭四边形的极小曲面的解析形式，这是 Plateau 问题的第一个准确解[Nitsche,1988]. 几乎同时，另一位德

国数学家 B.Rieman 也得到了同样的结果[Nitsche,1988]. 1930 年，J.Douglas 和 T.Rado 同时各自独立的发展了一套解决 Plateau 问题的全新的方法，他们的方法很简便: Rado 使用共形映射和逼近问题中的极限定理得到 Plateau 问题的解[Rado,1930]；而 Douglas 则使用变分计算的直接方法[Douglas,1931],他也因此获得了当年的第一届菲尔兹奖.他们的方法本质上是将面积极小问题转换为 Dirichlet 能量积分问题，所以 Plateau 问题实质上是决定给定曲线的最优参数即等温参数化问题. 参数曲线曲面表示一直是描述几何形状的重要工具，Coons,Bezier 等对参数几何造型奠定了基础. Bézier 曲线是 CAGD 中最基本的造型工具之一.为了使得造型能够方便调整设计，一般采用通过调整控制顶点来调整造型的方法，这样的调整比较简便. 不同的控制顶点就会产生不同的曲面. 采用参数形式，一方面可以突出几何不变量的含义，另一方面为过渡到微分流形理论打基础.

在那之后，Federer 等人构造了一条 Jordan 曲线作为边界曲线，在该边界曲线上找不到有限亏格的曲面作为极小曲面[Fleming,1969,Federer,1969,Federer,1970]. 他们的工作推广了 Plateau 问题的研究范围，也说明了我们不仅需要对极小曲面的拓扑类型进行分类，而且还需借助微分几何的概念以及微分流形的概念. 更进一步，Morrey 后来在 Rieman 空间中解决了更广义的 Plateau 问题[Morrey,1966].

从微分几何的观点我们可以更为精确地测量几何体局部的性质，而不是仅停留在外部形状的研究上，这使得研究从现象到本质产生飞跃，使得研究更具有科学性.为了探究曲面的弯曲程度，我们会计算该曲面的绝对平均曲率，平均绝对曲率小的曲面是较为平坦的，这里使用曲率来刻画曲面弯曲程度. 平均曲率的概念有助于进一步刻画极小曲面，曲面在某点的平均曲率为 0 就意味着曲面在该点的两个主法曲率大小是相等的[Mei，Huang，2003].

极小曲面在现代膜结构工程中有着很重要的应用. 在几何上，根据曲面在两主曲率方向的曲率乘积，可将曲面分为正高斯曲面、零高斯曲面和负高斯曲面三大类.正高斯曲面的两个主曲率半径均位于曲面的同侧，如球面，这类曲面也称为同向曲面(synclastic surface). 零高斯曲面在两个主曲率方向中有一个方向的曲率为零，如柱面.负高斯曲面的两个主曲率半径分别位于曲面的两侧，如鞍面，这类曲面也称为互反曲面(anticlastic surface). 前两类曲面较多应用于类似网壳结构那样的刚性结构中，而互反曲面则是索网结构和膜结构中常用的曲面形式 [Wu,Xu,2004].负高斯曲率曲面在建筑业、造船业及航空工业中都有广泛的应用.在建筑上,可利用负高斯曲率曲面来设计马鞍形的房顶,如杭州市的浙江省体育馆,其房

顶就是马鞍形曲面.在造船工业中,要采用负高斯曲率曲面来设计船体的球鼻与船首其它部分的过渡曲面;在飞机机翼的局部设计中,利用负高斯曲率曲面可使机翼增大升力.因此对负高斯曲率曲面的研究是几何设计的一个重要课题[Jin,Yang,2000].

为了覆盖较大面积而不增加不必要的重量，尾面可用一组膜片来形成.设计师可以通过改变内外支承的布置来得到许多负高斯曲面.进行综合设计时要同时考虑建筑和结构两方面的因素.在设计过程中，支承构件的布置和尺寸以及膜面的形状应与所需覆盖空间的跨度和承受的荷载相联系.这样，通过逐步设计最终得到最优的建筑方案.

建筑师们往往根据极小曲面的原理来进行建筑设计，方案要使其结构、外观形态以及经济性的多方面因素与其功能相适应.最简单的方案往往最有效的.工程中常用的只是一些典型的负高斯曲面，其实可以采用的曲面形式是多种多样的.

近代随着韧性大、放水、透光且表面光洁、易清洗、抗老化的建筑膜材料的出现，及计算机科学技术的飞速发展，使得膜结构建筑更加受到人们的亲睐，这种机构已经广泛应用于博览会、体育场等大型的公共建筑上. 如南宁澳海蓝湾、国家游泳体育中心及美国的丹佛新国际机场候机厅[C.W. Fentress,Jia,1996]等.

极小曲面在建筑设计、飞机轮船制造业、结构化学、材料科学、植物学、动物学等领域都有着非常重要的应用.另外，它形状独特并具有超凡的美感，许多艺术家收藏极小曲面作为模型的作品, 因此将极小曲面引入CAGD有着积极的意义.

§1.2 极小曲面研究在CAGD中的发展概况

极小曲面是一类特殊的非线性 PDE 曲面，文献 [Man,Wang,2003]利用非线性约束优化方法和有限元法研究了具有给定边界的极小曲面的 B-样条函数曲面逼近，将极小曲面正式引入 CAGD 造型系统. CAGD 领域中的 Plateau-Bézier 问题可以描述为：给定空间中的一条 Bézier 闭曲线,寻找以该 Bézier 闭曲线为边界的 Bézier 曲面，使得该曲面是在所有具有相同边界的 Bézier 曲面中面积是最小的[Jin,1999]. 对于这一问题，很多学者进行了不同角度的探索，对极小曲面的发展做出了贡献. 极小曲面是平均曲率为 0 的曲面，从本质上是要求解一椭圆偏微分方程的解. PDE 曲面造型方法利用此类方程中偏微分算子实际上是一种光

滑化过程，由这种方法生成的曲面自然、光顺，因此被广泛应用于船体、飞机外形等曲面的设计.

基于 Dirichlet 能量函数最小化的方法，在文献[Monterde,2004]及文献[Arnal A., Lluch A.,Monterde,2003]中分别用矩形域上的张量积Bézier曲面和三角域上的B-B曲面来近似表示极小曲面.但是这里的方法都很复杂，在实际应用中极不方便.实际上，如果一张参数曲面满足等温参数条件，那么它为极小曲面的充要条件是它为调和曲面.文献[Monterde,2003]和[Monterde,2004]中考虑用调和曲面来近似表示极小曲面，给出了矩形域上张量积 Bézier 曲面为调和曲面的充要条件，并且证明了该张量积曲面的控制网格由其相应的两条边界曲线的控制顶点完全决定，这给设计带来了很大的方便.

利用满足等温参数条件的调和参数曲面是极小曲面这一性质，很多学者对给定边界的极小曲面的造型设计做了研究. Farin 和 Hansford [Fairn,Hansford,1999]认为直接用平均曲率为 0 来刻画 Plateau-Bézier 问题，在造型设计时存在很多不便. 他们直接针对控制顶点本身提出了离散拉普拉斯算子生成网格方法，这种方法计算量少，生成的曲面具有保形性及能量泛函最小原则. 虽然他们的这种方法显得过于粗糙，但是他们也开创了研究 Plateau-Bézier 问题的新方法. 在那之后，Monterde [Monterde,2003]深入研究 Dirichlet 函数的性质，研究了特殊的一类 Plateau-Bézier 问题：其给定的边界曲线是 Bézier 曲线.他通过用 Dirichlet 泛函来替代面积泛函来逼近 Plateau-Bézier 问题的解.接着 Monterde 和 Ugail [Monterde,Ugail,2004]给出了基于椭圆形偏微分算子的给定边界来构造曲面的新方法，特别地，致力于调和及双调和 Bézier 曲面的设计，从中得出了重要结论：任何双调和的 Bézier 曲面可以由控制边界完全确定.这为我们以后对极小曲面的研究奠定了基础.另外，他们又研究了用四阶 PDE 的方法来产生给定控制边界的 Bézier 曲面.这种方法是对前面调和及双调和情形的一般化.

与此同时，满家巨和汪国昭研究了 B 样条极小曲面造型[Man,Wang,2003],他们利用等温参数极小曲面的调和性质，证明了三次等温参数多项式极小曲面的唯一性.另外，徐岗和汪国昭利用方向导数研究了三角域上的调和 B-B 曲面[Xu,Wang,2006]，给出了三角域上的 B-B 曲面为调和曲面的充要条件，并且证明了任何一个三角域上的调和 B-B 曲面的控制网格均由它的第一层和第二层控制顶点决定，最后还对极小曲面在建筑设计中的应用进行了初步探讨. 这些论文的研究探索对进一步研究极小曲面的造型具有重要作用.

尽管极小曲面造型设计在计算机辅助几何设计领域取得了很多重要成果，但是其研究的范围还是比较狭窄，并不能完全满足实际的需要. 我们知道 Bézier 曲线不能精确表示除

抛物线以外的圆锥曲线，而有理 Bézier 曲线既能表示多项式曲线(如飞机机身上的纵向曲线)，又能表示圆锥曲线(如飞机机身上的横截面线)，可以把两者统一处理，Bézier 曲线是有理 Bézier 曲线的特殊形式. 类似地, Bézier 曲面不能精确表示除抛物面外的二次曲面, 而有理 Bézier 曲面能克服这一缺陷. 因此把以往构造极小曲面的方法推广到有理调和 Bézier 曲面的设计有着很广泛的应用价值.

§ 1.3 本文的主要工作

基于以上原因，本文主要探索了有理调和 Bézier 曲面的构造方法，其主要思想是采用有限差分法来构造出调和曲面. 基于有理 Bézier 曲面的复杂形式，求导之后形式更为复杂，如果直接利用调和算子进行求解，则会产生一系列的高度非线性的方程，即使是二阶有理 Bézier 曲面，处理过程也是很复杂的，这点可以详阅后记. 为了将解决方案转化为线性方程的形式，本文采用了有限差分的方法，将要构造的曲面加以离散从而得出曲面上的点值，再将求解出的点连接起来便可产生所要求的曲面. 另外，这是一种逼近，当划分的份数无限大时，由这些点所生成的网格面就无限接近于所求的有理调和 Bézier 曲面. 这种方法适用于任意 n 阶有理 Bézier 情形，并且求解过程都是解线性方程组.

本文是这样来组织的：第一章首先介绍了国际上对于极小曲面的研究及极小曲面在实际工程中的应用，其次是极小曲面在 CAGD 领域中的发展概况，最后综述本文的主要工作. 第二章是对本文所需要的微分几何的知识及调和 Bézier 曲面的造型理论加以简单的回顾，为之后的探索做知识铺垫.第三章是有理调和 Bézier 曲面造型的探索，研究了针对曲面来进行的有限差分法.第四章主要是应用大量的实例来验证这种造型方法.第五章是对全文内容的总结和对将来工作的展望.

第二章 预备知识

§2.1 极小曲面与调和曲面的关系

很多学者致力于研究 Plateau-Bézier 问题，其基本的解决方法都是联系调和曲面来进行研究.那么极小曲面与调和曲面之间到底存在什么关系呢？这一节将对此加以阐述.

假定空间 R^3 中的参数曲面表示如下:

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),u\in(-\infty,+\infty),v\in(-\infty,+\infty).$$

它的第一基本形式为

$$E=<\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_u>,F=<\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v>,G=<\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_v>.$$

其中 $\boldsymbol{r}_u$ 和 $\boldsymbol{r}_v$ 为 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的一阶偏导数，$<,>$ 为向量的点积运算算子.

它的第二基本形式为

$$L=(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uu}),M=(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{uv}),N=(\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v,\boldsymbol{r}_{vv}).$$

其中 $\boldsymbol{r}_{uu}$, $\boldsymbol{r}_{vv}$ 和 $\boldsymbol{r}_{uv}$ 为 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的二阶偏导数，$(,,)$ 为向量的复合运算算子.曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的平均曲率 H 和高斯曲率 K 分别为

$$H=\frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)},K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

定义2.1.1 若曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 满足 $E=G,F=0,$ 则称曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 为等温参数曲面.

定义2.1.2 若曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 满足 $\boldsymbol{r}_{uu}+\boldsymbol{r}_{vv}=0,$ 则称曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 为调和曲面.

定义2.1.3 若曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 的平均曲率 H 恒为零，则称曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 为极小曲面.

引理 2.1.1 等温参数曲面为极小曲面的充要条件是它为调和曲面.

证明:假设曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$ 为等温参数全面，即 $E=G,F=0,$ 其中

$$E=<\boldsymbol{r}_u(u,v),\boldsymbol{r}_u(u,v)>,F=<\boldsymbol{r}_u(u,v),\boldsymbol{r}_v(u,v)>,G=<\boldsymbol{r}_v(u,v),\boldsymbol{r}_v(u,v)>.$$

对上述两式两边同时求导可得

$$<\boldsymbol{r}_{uv}(u,v),\boldsymbol{r}_u(u,v)>=<\boldsymbol{r}_{vv}(u,v),\boldsymbol{r}_v(u,v)>=-<\boldsymbol{r}_v(u,v),\boldsymbol{r}_{uu}(u,v)>.$$

即有

$$<\boldsymbol{r}_u(u,v),\boldsymbol{r}_{vv}(u,v)+\boldsymbol{r}_{uu}(u,v)>=0$$
$$<\boldsymbol{r}_v(u,v),\boldsymbol{r}_{vv}(u,v)+\boldsymbol{r}_{uu}(u,v)>=0$$

成立. 于是推知向量 $\boldsymbol{r}_{vv}(u,v)+\boldsymbol{r}_{uu}(u,v)$ 平行于曲面的单位法向量 N；

同时，以 e, f, g 表示正则曲面的第二基本形式的系数，则有

$$H=\frac{1}{2}\frac{eG-2fG+gE}{EG-F^2}=\frac{1}{2}\frac{e+g}{E}.$$

因此有

$$H=0\Leftrightarrow e+g=0\Leftrightarrow<N,\boldsymbol{r}_{uu}(u,v)>+<N,\boldsymbol{r}_{uu}(u,v)>=0\Leftrightarrow<N,\boldsymbol{r}_{uu}+\boldsymbol{r}_{vv}>=0$$

$$\Leftrightarrow\left\|\boldsymbol{r}_{uu}+\boldsymbol{r}_{vv}\right\|=0\Leftrightarrow\boldsymbol{r}_{uu}+\boldsymbol{r}_{vv}=0.$$ 证毕

由于直接求解给定空间闭曲线上的极小曲面是相当困难的，直到如今，也没有很好的形式解. 这时,我们就要转变思路寻找其他的方法来求取极小曲面. 基于等温参数曲面是极小曲面的充要条件是其是调和的这一结论， 对于 Plateau-Bézier 问题，利用 Bézier 曲面的特殊性质，可以得到很好的极小曲面造型算法，这点在以后的章节中会加以介绍. 这种造型方法在理论上易懂，实现起来也很简单，对极小曲面的研究有重要影响.

§2.2 Bézier 调和曲面设计

基于上节理论知识，这时 Bézier-Plateau 问题可以这样描述：给定闭的边界曲线(控制边界为 Bézier 曲线)，目标是要寻找基于给定边界的面积最小的曲面. 求极小曲面的问题就可以转化为求解能量泛函的极值.

假定 C: 空间中一条闭的可求长的简单 Jordan 曲线，Ω:曲线 C 在平面上的投影所围成的区域. 定义函数空间:

$$\boldsymbol{X}:\ \left\{z=z(x,y):\Omega\to\Re\,|\,z\left(\partial\Omega\right)=C\right\}.$$

Plateau 问题就是在 $\boldsymbol{X}$ 中寻找面积最小的曲面，而曲面的面积可以表示为

$$A(z)=\iint_{\Omega}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy. \tag{2.21}$$

这个面积泛函的逗留点称为极小曲面，它满足 $Euler-Lagrange$ 方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)=0. \tag{2.2.2}$$

上述方程(2.2.2)被称为极小曲面方程. 该方程是非线性的偏微分方程，这一问题的求解是很困难的.在探究 $Plateau-$Bézier 问题时， $Monterde$ [$Monterde$,2003; $Monterde$,2004] 采用 $Dirichlet$ 的方法进行逼近来构造出极小曲面.

假定正则参数曲面 $\boldsymbol{r}(u,v):U\to R^3$，其中 $U=[0,1]\times[0,1]$,则其面积可以表示为

$$A(\boldsymbol{r})=\int_U\|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v\|dudv=\int_U(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}dudv. \tag{2.2.3}$$

另一方面 $Dirichlet$ 泛函可以表示为：

$$D(\boldsymbol{r})=\int_U(\|\boldsymbol{r}_u\|^2+\|\boldsymbol{r}_v\|^2)dudv=\frac{1}{2}\int_U(E(u,v)+G(u,v))dudv. \tag{2.2.4}$$

由于 $E=<\boldsymbol{r}_u(u,v),\boldsymbol{r}_u(u,v)>,F=<\boldsymbol{r}_u(u,v),\boldsymbol{r}_v(u,v)>,G=<\boldsymbol{r}_v(u,v),\boldsymbol{r}_v(u,v)>,$

则显然有

$$E\geq 0,F\geq 0,G\geq 0.$$

成立. 则

$$(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}\leq(EG)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{E+G}{2}.$$

所以对于任意的控制网格及其曲面 $\boldsymbol{r}(u,v)$, 恒有 $A(\boldsymbol{r})\leq D(\boldsymbol{r})$ 成立,当且仅当 $E=G,F=0$ 时等号成立.而由前面知识可知，满足 $E=G,F=0$ 的曲面是等温参数曲面.对于等温参数曲面，使得所构造的曲面面积泛函 $A(z)=\iint_{\Omega}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$ 最小等价于使得 $Dirichlet$ 泛函

$$D(\boldsymbol{r})=\int_U(\|\boldsymbol{r}_u\|^2+\|\boldsymbol{r}_v\|^2)dudv=\frac{1}{2}\int_U(E(u,v)+G(u,v))dudv$$

最小. 由微分方程的知识可知，要使 $Dirichlet$ 泛函最小需满足 $Euler-Lagrange$ 方程：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(u,v)}{\partial v^2}=\Delta \boldsymbol{r}=0. \tag{2.2.5}$$

我们将 $Dirichlet$ 泛函取得极值所满足的 $Euler-Lagrange$ 方程定义为拉普拉斯算子. 类似于调和曲面的定义，也可以利用 $Euler-Lagrange$ 函数定义标准的双调和算子.

那么如何构造给定的控制边界是 Bézier 曲线的极小 Bézier 曲面呢？

首先，假设以空间中的点 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 为控制顶点的 Bézier 曲面表示为：

$$\boldsymbol{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(u)B_j^m(v)\boldsymbol{P}_{ij},\text{其中 } R:[0,1]\times\left[0,1\right]\to\Re^3.$$

定理 2.2.1 $\left[Monterde,Ugail,2004\right]$ 给定 $\Re^3$ 中的控制网格，$\left\{\boldsymbol{P}_{ij}\right\}_{i,j=0}^{n,m}$，它所对应的 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}:[0,1]\times\left[0,1\right]\to\Re^3$ 是调和曲面，即 $\Delta\boldsymbol{R}(u,v)=0$ 的充要条件是对于任意的 $i\in\left\{1,\cdots,n\right\}$, $j\in\left\{1,\cdots,m\right\}$ 有以下方程组成立.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}_{i+2,j}a_{n,i,0}+\boldsymbol{P}_{i+1,j}(a_{n,i-1,1}-2a_{n,i,0})\\
&+\boldsymbol{P}_{i-1,j}(a_{n,i-1,1}-2a_{n,i-2,2})+\boldsymbol{P}_{i-2,j}a_{n,i-2,2}\\
&+\boldsymbol{P}_{i,j+2}a_{m,j,0}+\boldsymbol{P}_{i,j+1}(a_{m,j-1,1}-2a_{m,j,0})\\
&+\boldsymbol{P}_{i,j-1}(a_{m,j-1,1}-2a_{m,j-2,2})+\boldsymbol{P}_{i,j-2}a_{m,j-2,2}\\
&+\boldsymbol{P}_{ij}(a_{n,i,0}-2a_{n,i-1,1}+a_{n,i-2,2}\\
&+a_{m,j,0}-2a_{m,j-1,1}+a_{m,j-2,2})=0.
\end{aligned}$$

其中 $i\in\left\{0,\cdots,n-2\right\}$，

$$a_{ni0}=(n-i)(n-i-1),a_{ni1}=2(i+1)(n-i-1),a_{ni2}=(i+1)(i+2).$$

当 $i\notin\left\{1,\cdots,n\right\}, j\notin\left\{1,\cdots,m\right\}$ 时，$\boldsymbol{P}_{ij}=0$；

当 $i\notin\left\{0,\cdots,n-2\right\}$ 时，$a_{ni0}=a_{ni1}=a_{ni2}=0$ 成立.

证明：

将拉普拉斯算子作用于 Bézier 曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 可得：

$$\Delta\boldsymbol{R}(u,v)=\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\boldsymbol{R}(u,v)$$
$$=n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{m}B_i^{n-2}(u)B_j^m(v)\Delta^{0,2}\boldsymbol{P}_{ij}$$
$$+m(m-1)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-2}B_i^{n}(u)B_j^{m-2}(v)\Delta^{0,2}\boldsymbol{P}_{ij},$$

其中 $\Delta^{2,0}\boldsymbol{P}_{i,j}=\boldsymbol{P}_{i+2,j}-2\boldsymbol{P}_{i+1,j}+\boldsymbol{P}_{i,j},\Delta^{0,2}\boldsymbol{P}_{i,j}=\boldsymbol{P}_{i,j+2}-2\boldsymbol{P}_{i,j+1}+\boldsymbol{P}_{i,j}.$

为了简化上述多项式，我们需要引入以下的变换：

$$B_i^{n-2}(t)=\frac{1}{n(n-1)}((n-i)(n-i-1)B_i^n(t)$$
$$+2(i+1)(n-i-1)B_{i+1}^n(t)+(i+1)(i+2)B_{i+2}^n(t)).$$

对于 $i\in\{0,\cdots,n-2\}$，我们把 a_{in},b_{in},c_{in} 分别定义为：

$$a_{in}=(n-i)(n-i-1),b_{in}=2(i+1)(n-i-1),c_{in}=(i+1)(i+2),$$

对于 $i\notin\{0,\cdots,n-2\}$ 时， $a_{in}=b_{in}=c_{in}=0.$

则有

$$\Delta\boldsymbol{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}B_i^n(u)B_j^m(v)$$
$$(n(n-1)(a_{in}\Delta^{2,0}\boldsymbol{P}_{ij}+b_{i-1,n}\Delta^{2,0}\boldsymbol{P}_{i-1,j}+c_{i-2,n}\Delta^{2,0}\boldsymbol{P}_{i-2,j})$$
$$+m(m-1)(a_{jm}\Delta^{0,2}\boldsymbol{P}_{ij}+b_{j-1,m}\Delta^{0,2}\boldsymbol{P}_{i,j-1}+c_{j-2,m}\Delta^{0,2}\boldsymbol{P}_{i,j-2})).$$

经拉普拉斯算子作用过的 Bézier 曲面，仍然是一张 Bézier 曲面，不妨记其控制顶点为 $\{\boldsymbol{Q}_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}$，则利用 Bézier 基的线性无关性可知： $\Delta\boldsymbol{R}(u,v)=0\Leftrightarrow\{\boldsymbol{Q}_{ij}\}_{i,j=0}^{n,m}=0.$

将上述得出的等式加以整理化简便可以证明此结论.

当 $m=n$ 时，**定理 2.2.1** $[Monterde,Ugail,2004]$ 的结论简化为以下结果

$$\begin{aligned}0=&\boldsymbol{P}_{i+2,j}a_{in}+\boldsymbol{P}_{i+1,j}(b_{i-1,n}-2a_{in})+\boldsymbol{P}_{i-1,j}(b_{i-1,n}-2c_{i-2,n})\\&+\boldsymbol{P}_{i-2,j}c_{i-2,n}+\boldsymbol{P}_{i,j+2}a_{jm}+\boldsymbol{P}_{i,j+1}(b_{j-1,m}-2a_{jm})\\&+\boldsymbol{P}_{i,j-1}(b_{j-1,m}-2c_{j-1,m})+\boldsymbol{P}_{i,j-2}c_{j-2,m}\\&+\boldsymbol{P}_{ij}(a_{in}-2b_{i-1,n}+c_{i-2,n}+a_{jm}-2b_{j-1,m}+c_{j-2,m})\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

由上述定理我们可以知道，对于 Bézier 调和曲面，控制顶点之间有着好的性质，即其中的一些控制顶点是其他一些控制顶点的线性组合.精确的说,第一排和最后一排控制顶点可以完全确定整个 Bézier 调和曲面.这一点是如何证明的呢？首先看一下下面的引理.

引理 2.2.1 $[Monterde, 2003]$ 设 $\boldsymbol{f}(u,v)=\sum_{k,l=0}^{n} a_{kl}u^k v^l$ 是 n 次调和多项式，其中 $n \geq 2$，则有以下结论成立：

(1) 如果 n 是奇数，则所有的系数 $\left\{a_{kl}\right\}_{k=2,l=0}^{n}$ 可以由 $\left\{a_{0l}, a_{1l}\right\}_{l=0}^{n}$ 完全确定，即所得系数都可以表示为第一行及第二行系数的线性组合.

(2) 如果 n 是偶数，则所有的系数 $\left\{a_{kl}\right\}_{k=2,l=0}^{n}$ 和 a_{1n} 可以由 $\left\{a_{0l}\right\}_{l=0}^{n}$ 及 $\left\{a_{1l}\right\}_{l=0}^{n-1}$ 完全确定，即 $\left\{a_{kl}\right\}_{k=2,l=0}^{n}$ 和 a_{1n} 可以由 $\left\{a_{0l}\right\}_{l=0}^{n}$ 及 $\left\{a_{1l}\right\}_{l=0}^{n-1}$ 线性表示.

我们知道 Bézier 基与幂基之间是可以相互转化的，这两组基是等价的. 由**引理 2.2.1** 可以得到以下的推论.

推论 2.2.1 $[Monterde, Ugail, 2004]$ 假设 $\vec{\boldsymbol{X}}(u,v)=\sum_{k,l=0}^{n} B_k^n(u)B_l^n(v)\boldsymbol{P}_{kl}$ 是 n 阶调和的 Bézier 曲面，其控制顶点 $\left\{\boldsymbol{P}_{kl}\right\}_{k,l=0}^{n}$ 有以下结论成立：

(1) 如果 n 是奇数，中间的 $n-1$ 排控制顶点可以由第一行和最后一行的控制顶点线性表示，即 $\left\{\boldsymbol{P}_{kl}\right\}_{k=1,l=0}^{n-1,n}$ 可以由 $\left\{\boldsymbol{P}_{0l}\right\}_{l=0}^{n}$ 及 $\left\{\boldsymbol{P}_{nl}\right\}_{l=0}^{n}$ 完全确定.

(2) 如果 n 是偶数，中间的控制顶点 $\left\{\boldsymbol{P}_{kl}\right\}_{k=1,l=0}^{n-1,n}$ 和角点 $\boldsymbol{P}_{nn}$ 可以由第一行和最后一行及 $\left\{\boldsymbol{P}_{0l}\right\}_{l=0}^{n}$，$\left\{\boldsymbol{P}_{nl}\right\}_{l=0}^{n-1}$ 完全确定.

有了以上的理论知识做准备，我们现在要解决的问题是：给定 n 次 Bézier 曲线组成的边界，已知两条相对边界的控制顶点，那么如何求得在该给定边界上的调和 Bézier 曲面呢？

首先，看一下简单情形，对于曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n(u)B_j^m(v)\boldsymbol{P}_{ij}$，当 $n=2, m=2$ 时，即二阶情形，这时已知空间中的控制顶点矩阵 $\left\{\boldsymbol{P}_{kl}\right\}_{k,l=0}^{2}$ 为：

$$
\begin{matrix}
\boldsymbol{P}_{00} & \boldsymbol{P}_{01} & \boldsymbol{P}_{02} \\
* & * & * \\
\boldsymbol{P}_{20} & \boldsymbol{P}_{21} & \boldsymbol{P}_{22}
\end{matrix}
$$

根据**定理 2.2.1** 的特殊情形 $(m=n)$ 所得到的等式可得到以下等式：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{01} &= \frac{1}{2}(2\boldsymbol{P}_{00} + \boldsymbol{P}_{02} - 2\boldsymbol{P}_{10} + \boldsymbol{P}_{20}), \\
\boldsymbol{P}_{11} &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{P}_{00} + \boldsymbol{P}_{02} + \boldsymbol{P}_{20} + \boldsymbol{P}_{22}), \\
\boldsymbol{P}_{01} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_{00} + 2\boldsymbol{P}_{10} + 2\boldsymbol{P}_{20} + \boldsymbol{P}_{22}), \\
\boldsymbol{P}_{01} &= \frac{1}{2}(-\boldsymbol{P}_{00} + \boldsymbol{P}_{02} + 2\boldsymbol{P}_{10} - \boldsymbol{P}_{20} + \boldsymbol{P}_{22}).
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

我们可以利用(2.2.8)中的四个线性方程组求出所有未知的控制顶点 $\boldsymbol{P}_{10}$ $\boldsymbol{P}_{11}$ $\boldsymbol{P}_{12}$，进而可以构造出所要求解的调和曲面.

我们再来看下简单的三次情形：$n=3, m=3$ 时.

这时已知空间中的控制顶点矩阵 $\{\boldsymbol{P}_{kl}\}_{k,l=0}^{3}$ 为：

$$\begin{matrix}
\boldsymbol{P}_{00} & \boldsymbol{P}_{01} & \boldsymbol{P}_{02} & \boldsymbol{P}_{03} \\
* & * & * & * \\
* & * & * & * \\
\boldsymbol{P}_{30} & \boldsymbol{P}_{31} & \boldsymbol{P}_{32} & \boldsymbol{P}_{33}
\end{matrix}$$

这时候只知道第一排和最后一排控制顶点，这就需要一个含有 8 个方程的方程组，从中反求出未知的顶点. 根据**定理 2.2.1** 的特殊情形 $(m=n)$ 所得到的等式组，我们可以得到以下等式组：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{11} &= \frac{1}{9}(4\boldsymbol{P}_{00} + 2\boldsymbol{P}_{03} + 2\boldsymbol{P}_{30} + \boldsymbol{P}_{33}), \\
\boldsymbol{P}_{21} &= \frac{1}{9}(2\boldsymbol{P}_{00} + \boldsymbol{P}_{03} + 4\boldsymbol{P}_{30} + 2\boldsymbol{P}_{33}), \\
\boldsymbol{P}_{12} &= \frac{1}{9}(2\boldsymbol{P}_{00} + 4\boldsymbol{P}_{03} + \boldsymbol{P}_{30} + 2\boldsymbol{P}_{33}), \\
\boldsymbol{P}_{22} &= \frac{1}{9}(\boldsymbol{P}_{00} + 2\boldsymbol{P}_{03} + 2\boldsymbol{P}_{30} + 4\boldsymbol{P}_{33}), \\
\boldsymbol{P}_{10} &= \frac{1}{3}(4\boldsymbol{P}_{00} - 4\boldsymbol{P}_{01} + 2\boldsymbol{P}_{02} + 2\boldsymbol{P}_{30} - 2\boldsymbol{P}_{31} + \boldsymbol{P}_{32}), \\
\boldsymbol{P}_{20} &= \frac{1}{3}(2\boldsymbol{P}_{00} - 2\boldsymbol{P}_{01} + \boldsymbol{P}_{02} + 4\boldsymbol{P}_{30} - 4\boldsymbol{P}_{31} + 2\boldsymbol{P}_{32}), \\
\boldsymbol{P}_{13} &= \frac{1}{3}(2\boldsymbol{P}_{01} - 4\boldsymbol{P}_{02} + 4\boldsymbol{P}_{03} + \boldsymbol{P}_{31} - 2\boldsymbol{P}_{32} + 2\boldsymbol{P}_{33}), \\
\boldsymbol{P}_{23} &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{P}_{01} - 2\boldsymbol{P}_{02} + 2\boldsymbol{P}_{03} + 2\boldsymbol{P}_{31} - 4\boldsymbol{P}_{32} + 4\boldsymbol{P}_{33}).
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

从(2.2.9)中我们可以反求出未知控制顶点，且其解是唯一的. 那么一般 $n \times n$ 情形会怎么样

呢？答案是肯定的，我们可以从**定理 2.2.1** 中得到求解的算法. 即给定控制边界的第一排和最后一排控制顶点，我们便可以通过曲面调和这一条件来确定出调和曲面所有的控制顶点，如果该曲面是等温参数曲面，那么它便是极小曲面. 这一算法对于有理 Bézier 调和曲面的造型设计有重要的意义.

§2.3 有限差分法介绍

有限差分方法是用于微分方程定解问题求解的最常用的数值方法[Yu, Yang,2003].

差分法的基本概念是用差商代替微商，从而把偏微分方程转换为差分方程. 将所研究的未知函数的域细分为许多网格，然后列出对应每个交叉点(结点)的差分方程，解该差分方程组，将得到在每个结点处近似于真值的函数值，然后再利用插值方法便可以从离散解得到定解问题在整个区域上的近似解[An,Liu,Guo,1996].

有限差分法的主要内容包括[http://baike.baidu.com/view]: 如何根据问题的特点将定解区域作网格剖分；如何把原微分方程离散化为差分方程组以及如何解此代数方程组. 此外为了保证计算过程的可行和计算结果的正确，还需从理论上分析差分方程组的性态，包括解的唯一性、存在性和差分格式的相容性、收敛性和稳定性.对于一个微分方程建立的各种差分格式，为了有实用意义，一个基本要求是它们能够任意逼近微分方程，这就是相容性要求. 另外，一个差分格式是否有用，最终要看差分方程的精确解能否任意逼近微分方程的解，这就是收敛性的概念. 此外，还有一个重要的概念必须考虑，即差分格式的稳定性. 因为差分格式的计算过程是逐层推进的，在计算第 $n+1$ 层的近似值时要用到第 n 层的近似值 ，直到与初始值有关.前面各层若有舍入误差，必然影响到后面各层的值，如果误差的影响越来越大，以致差分格式的精确解的面貌完全被掩盖，这种格式是不稳定的，相反如果误差的传播是可以控制的，就认为格式是稳定的.只有在这种情形，差分格式在实际计算中的近似解才可能任意逼近差分方程的精确解.

关于差分格式的构造一般有以下 3 种方法[http://baike.baidu.com/view]. 最常用的方法是数值微分法，比如用差商代替微商等.另一方法叫积分插值法，因为在实际问题中得出的微分方程常常反映物理上的某种守恒原理，一般可以通过积分形式来表示. 此外还可以用待定系数法构造一些精度较高的差分格式.

这种方法在解决 $plateau-$Bézier 问题中有着广泛的应用，基于 Bézier 调和曲面的特性来求解出相应的调和曲面. $Farin$ 和 $Hansford$ 在 $[Farin, Hansford, 1999]$ 中应用这一方法，具体描述如下：

设 n 次 Bézier 参数曲面 $\boldsymbol{R}$ 表达式为 $\boldsymbol{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)B_j^n(v)\boldsymbol{P}_{ij}$, 要构造出极小曲面，需要使得能量泛函最小.特别地对于 $Coons$ 曲面片，我们知道其能量泛函为

$$\int_U \boldsymbol{R}_{uv}^2 dudv \text{，其中} U=[0,1]\times[0,1]$$

要使其能量泛函最小，需使其满足 $Euler-Lagrange\ \ PDE$：

$$\boldsymbol{R}_{uuvv}=0.$$

如果我们将此极小原理应用到离散的 $Coons$ 曲面片，我们可以得到以下结论：

$\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\Delta^{1,1}\boldsymbol{b}_{ij}\right]^2$ 最小，$\boldsymbol{b}_{i,j}$ 是离散的 $Coons$ 曲面片上的点.

其中 $\Delta^{1,1}\boldsymbol{b}_{i,j}=\boldsymbol{b}_{i+1,j+1}-\boldsymbol{b}_{i+1,j}-\boldsymbol{b}_{i,j+1}+\boldsymbol{b}_{ij}$.

下面我们来看一下有限差分方法的简单应用.

我们将拉普拉斯算子应用到给定的泛函 $\vec{X}:[u,v]\to R^3$,在有限差分网格上用 i, j 来定义网格节点，该网格步长为 h，则节点的坐标可以表示为：$u=ih, v=jh$，可以得到

$$\frac{\vec{x}_{i+1,j}-2\vec{x}_{i,j}+\vec{x}_{i-1,j}}{h^2}+\frac{\vec{x}_{i,j+1}-2\vec{x}_{i,j}+\vec{x}_{i,j-1}}{h^2}=0 \tag{2.3.1}$$

从(2.3.1)等式中我们容易知道

$$\vec{x}_{i,j}=\frac{1}{4}\left[\vec{x}_{i+1,j}+\vec{x}_{i-1,j}+\vec{x}_{i,j+1}\ \vec{x}_{i,j-1}\right]. \tag{2.3.2}$$

从(2.3.2)式中可以看出中间的未知控制顶点可用其周围的控制顶点来表示，那么是否存在特殊的模版来解决这一问题？下面我们将引入 $mask$ 定义.

如果以调和 $mask$ 的形式来表示(2.3.2)为

$$\frac{1}{4}\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 1 & \bullet & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix} \tag{2.3.3}$$

这里 *mask* 被定义为是用来计算中间未知点的模板. 从几何上可以这样说，未知控制顶点可以由其上下左右四个控制顶点来确定，这样就大大减少了计算量.

第三章 有理 Bézier 极小曲面设计

§3.1 有理 Bézier 极小曲面造型问题的提出

有理 Bézier 曲线在几何造型中有其独特的优势：一方面，可以精确表示圆锥曲线；另一方面，引入了权因子，使得几何造型的调整更加灵活. 类似地, Bézier 曲面不能精确表示除抛物面外的二次曲面, 而有理 Bézier 曲面能克服这一缺陷. 所以，将 Plateau-Bézier 问题推广到有理形式是必要的.

记 $\{\boldsymbol{P}_{kl}\}_{k,l=0}^{n,m}$ 为 $\Re^3$ 空间中 $(n+1)\times(m+1)$ 个点向量, 令 $\{w_{kl}\}_{k,l=0}^{n,m}$ 为权因子集, 则由此生成的 $n\times m$ 次有理Bézier曲面可表为:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(u,v)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}B_k^n(u)B_l^m(v)w_{kl}\boldsymbol{P}_{kl}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}B_k^n(u)B_l^m(v)w_{kl}},\qquad u,v\in U=[0,1]\times[0,1]. \tag{3.1.1}$$

曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 的第一基本形式之系数为 E,F,G 则与此曲面相对应的面积函数[do Carmo,1976]定义为:

$$A(\boldsymbol{R})=\int_U\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{3.1.2}$$

通过(3.1.1)可知有理Bézier曲面是由其控制顶点及其权因子唯一确定的. 因此可以这样来描述Plateau-Rational-Bézier问题:给定空间中一条闭的边界，在该边界上寻找面积最小的有理Bézier极小曲面.这一问题可以等价的描述为:给定边界的控制顶点和权因子，在所有具有上述相同边界控制顶点和权因子的有理Bézier曲面中，寻找面积泛函 $A(\boldsymbol{R})$ 达到最小的曲面. $A(\boldsymbol{R})$ 中涉及到参数曲面的第一基本形式 E,F,G，很显然需要对(3.1.1)进行求导. 由于

有理多项式求导是十分复杂的，求解过程涉及到高度非线性方程求解. 这时应该转换思路从其它角度来解决这一问题. 能否通过求解线性方程组来解决呢？

从第二章中可知，当 $E=G, F=0$，考虑曲面的 $Dirichlet$ 函数

$$D(\boldsymbol{R})=\int_U \frac{(E+G)}{2}dudv \tag{3.1.3}$$

及如何使得(3.1.3)取极值，当 $A(\boldsymbol{R})=D(\boldsymbol{R})$ 成立时所求得的曲面就是极小曲面.

值得注意的是：曲面的 $Dirichlet$ 函数依赖于曲面的参数化形式, 它的值会随着不同的参数化形式而改变. 但是, 曲面的面积函数不依赖于曲面的参数化形式, 它是曲面的内蕴几何量. 因此, 前者只能作为后者的一个近似度量. 换句话说,在曲面的等温参数化形式下, $Dirichlet$ 函数的最小值等于曲面面积函数的最小值.

由偏微分的知识可知：要使(3.1.3)式取得极值，应使其满足 $Euler-Lagrange$ 方程:

$$\boldsymbol{R}_{uu}+\boldsymbol{R}_{vv}=0.$$

这就是我们经常见到的调和方程,其求解模式比较固定，这一理论知识在极小曲面的造型过程中有着很广泛的应用.

§3.2 有理 Bézier 极小曲面造型理论知识

对于一张 $n\times n$ 有理 Bézier 曲面：

$$\boldsymbol{R}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}} \tag{3.2.1}$$

为了表示方便，记其分子，分母分别为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}\\ \boldsymbol{Y}&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

要构造出有理 Bézier 调和曲面，应先对有理 Bézier 曲面进行求导：

$$\boldsymbol{R}_u=\frac{\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_u\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Y}^2}$$
$$\boldsymbol{R}_v=\frac{\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_v\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{Y}^2}$$

$$\boldsymbol{R}_{uu}=\frac{(\boldsymbol{X}_{uu}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_{uu}\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^2-2\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{Y}_u\boldsymbol{X}_u+2\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}_u^2}{\boldsymbol{Y}^4}$$
$$\boldsymbol{R}_{vv}=\frac{(\boldsymbol{X}_{vv}\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}_{vv}\boldsymbol{X})\boldsymbol{Y}^2-2\boldsymbol{Y}^2\boldsymbol{Y}_v\boldsymbol{X}_v+2\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{Y}_v^2}{\boldsymbol{Y}^4}.$$

从上节内容可知，要使得其面积泛函 $A(\boldsymbol{R})$ 最小，则曲面应满足 $Euler-Lagrange$ 方程 $\boldsymbol{R}_{uu}+\boldsymbol{R}_{vv}=0$,即

$$\frac{(\boldsymbol{X}_{uu}+\boldsymbol{X}_{vv})\boldsymbol{Y}^2-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})-2\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{Y}_u+\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{Y}_v)+2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}_u^2+\boldsymbol{Y}_v^2)}{\boldsymbol{Y}^3}=0.$$

或

$$(\boldsymbol{X}_{uu}+\boldsymbol{X}_{vv})\boldsymbol{Y}^2-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})-2\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{Y}_u+\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{Y}_v)+2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}_u^2+\boldsymbol{Y}_v^2)=0. \qquad (3.2.3)$$

对于任意的调和的有理 Bézier 曲面都必须满足(3.2.3)式，现在的问题就是如何根据(3.2.3)来求解呢？也就是如何用已知的边界控制顶点和权因子来表示出整个有理 Bézier 曲面呢？

当然，最直接的方法是根据(3.2.3)对 (3.2.1)直接进行求导，利用 Bézier 基的线性无关性来求出控制顶点之间的关系. 通过探索，发现这一过程是很困难的，问题在于有理多项式求导后次数会增加，通过升阶利用基的线性无关性来求解就很困难.

观察(3.2.3)发现，其中有一项是关于分母的，如果分母是调和的，那么 $(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})=0$，(3.2.3)就简化为

$$(\boldsymbol{X}_{uu}+\boldsymbol{X}_{vv})\boldsymbol{Y}^2-2\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{Y}_u+\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{Y}_v)+2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}_u^2+\boldsymbol{Y}_v^2)=0. \qquad (3.2.4)$$

另一方面，欲求曲面的分母相当于多项式 Bézier 曲面的每一个分量, 其调和模式可以轻松地求出. 这是因为对于调和 Bézier 曲面，已经有很好的性质和结果，如给定控制顶点的第一排和最后一排，其他控制顶点可以由第一排和最后一排的控制顶点来线性表示，从而可以构造出整个调和的 Bézier 曲面.

那么可以采用分而治之的方法吗？先使分母调和，然后再达到整个有理 Bézier 曲面调和. 这是全部有理 Bézier 调和曲面中的重要一类. 现在的问题是求出的曲面是否比一般的

曲面性质更好呢？如绝对平均曲率较小，更加逼近于有理 Bézier 极小曲面. 这就涉及到权因子的选取. 对于有理 Bézier 曲面，权因子起到调整形状的作用，通过调和求出的权因子具有对称性，不会相差太大，这样构造出来的曲面不会很扭曲，应该是对称的.

基于这种情形，下面考虑一种特殊的有理 Bézier 极小曲面设计，那么应怎样求解呢？是否可以利用(3.2.4)直接求导来求解呢？下一节将对此加以阐述.

§3.3 有限差分法构造有理 Bézier 极小曲面

直接利用 Bézier 基的线性无关性来寻找控制顶点之间的关系，所构造的曲面是较精确的，但是涉及到高阶非线性方程组的求解，所以转换思维寻求其它的方法来解决， 采用有限差分法. 虽然只是一种逼近而不是精确解,但求解过程是求解线性方程组. 线性方程组有其特殊优势，求解快速，在实际曲面造型中应用比较多.

利用有限差分法求解这一问题具体思路如下:

将所求的调和的有理 Bézier 曲面划分成 $M\times M$ 的控制网格，再将曲面上的点进行离散，设其步长 $h=\dfrac{1}{M}$,则 $u_i=(i-1)*1/M$， $v_j=(j-1)*1/M$ ，其中 $i, j=1,2,...M+1$. 则一阶偏导和二阶偏导可以用以下式子来表示：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{X}_u=\frac{x''_{i+1,j}-x''_{i,j}}{h},\boldsymbol{X}_v=\frac{x''_{i,j+1}-x''_{i,j}}{h},\\
&\boldsymbol{Y}_u=\frac{w''_{i+1,j}-w''_{i,j}}{h},\boldsymbol{Y}_v=\frac{w''_{i,j+1}-w''_{i,j}}{h},\\
&\boldsymbol{X}_{uu}=\frac{x''_{i+1,j}-2x''_{i,j}+x''_{i-1,j}}{h^2},\boldsymbol{X}_{vv}=\frac{x''_{i,j+1}-2x''_{i,j}+x''_{i,j-1}}{h^2},\\
&\boldsymbol{Y}_{uu}=\frac{w''_{i+1,j}-2w''_{i,j}+w''_{i-1,j}}{h^2},\boldsymbol{Y}_{vv}=\frac{w''_{i,j+1}-2w''_{i,j}+w''_{i,j-1}}{h^2}.
\end{aligned}
$$

由偏微分知识可知: 当 $M\to\infty$ 时， $h\to 0$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^{"}_{i+1,j}-x^{"}_{i,j}}{h}\to \boldsymbol{X}_u, \frac{x^{"}_{i,j+1}-x^{"}_{i,j}}{h}\to \boldsymbol{X}_v,\\
&\frac{w^{"}_{i+1,j}-w^{"}_{i,j}}{h}\to \boldsymbol{Y}_u, \frac{w^{"}_{i,j+1}-w^{"}_{i,j}}{h}\to \boldsymbol{Y}_v,\\
&\frac{x^{"}_{i+1,j}-2x^{"}_{i,j}+x^{"}_{i-1,j}}{h^2}\to \boldsymbol{X}_{uu}, \frac{x^{"}_{i,j+1}-2x^{"}_{i,j}+x^{"}_{i,j-1}}{h^2}\to \boldsymbol{X}_{vv},\\
&\frac{w^{"}_{i+1,j}-2w^{"}_{i,j}+w^{"}_{i-1,j}}{h^2}\to \boldsymbol{Y}_{uu}, \frac{w^{"}_{i,j+1}-2w^{"}_{i,j}+w^{"}_{i,j-1}}{h^2}\to \boldsymbol{Y}_{vv}.
\end{aligned}
$$

(3.3.1)

其中 $w^{"}_{i,j}$ 是 $u=(i-1)*1/M$， $v=(j-1)*1/M$ 时，Y 的函数值.

即 $w^{"}_{ij}=\boldsymbol{Y}(u_i,v_j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n((i-1)/M)B_j^n((j-1)/M)w_{ij}$.

类似的， $x^{"}_{i,j}$ 是 $u=(i-1)*1/M$， $v=(j-1)*1/M$ 时， X 的函数值.

即 $x^{"}_{ij}=\boldsymbol{X}(u_i,v_j)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n((i-1)/M)B_j^n((j-1)/M)\boldsymbol{P}_{ij}$.

由 $\boldsymbol{R}_{uu}+\boldsymbol{R}_{vv}=0$ 可得

$$
\begin{aligned}
&w^{"2}_{i-1,j}(x^{"}_{i+1,j}-2x^{"}_{i,j}+x^{"}_{i-1,j})+w^{"2}_{i,j-1}(x^{"}_{i,j+1}-2x^{"}_{i,j}+x^{"}_{i,j-1})\\
&-x^{"}_{i-1,j}w^{"}_{i-1,j}(w^{"}_{i+1,j}-2w^{"}_{i,j}+w^{"}_{i-1,j})-x^{"}_{i,j-1}w^{"}_{i,j-1}\\
&(w^{"}_{i,j+1}-2w^{"}_{i,j}+w^{"}_{i,j-1})-2((x^{"}_{i,j+1}-x^{"}_{i,j})(w^{"}_{i,j+1}-w^{"}_{i,j})\\
&+(x^{"}_{i+1,j}-x^{"}_{i,j})(w^{"}_{i+1,j}-w^{"}_{i,j}))w^{"}_{i,j}+2((w^{"}_{i+1,j}-w^{"}_{i,j})^2\\
&+(w^{"}_{i,j+1}-w^{"}_{i,j})^2)x^{"}_{i,j}=0
\end{aligned} \tag{3.3.2}
$$

根据第二章的知识: 如果分母是调和的，给定其一对边界的权因子就可以求出所有的权因子，这样对于任意给定的 u,v， $w_{i,j}$ 都是已知的. 给定有理 Bézier 曲面边界的控制顶点和权因子，利用(3.3.2)组成线性方程组可以计算出所有的曲面上的点值 $x_{ij}^{"}/w_{ij}^{"}$, 并且此解是唯一的. 最后将所求出的点连接就得到所求的有理调和 Bézier 曲面. 当划分的份数越多，其曲面越光滑，也就越接近于有理 Bézier 极小曲面. 在第四章中，将通过实例来验证这一方法，并对其绝对平均曲率图进行分析.

第四章 有理Bézier极小曲面求解实例

本章给出了低阶有理Bézier极小曲面求解实例，并对其绝对平均曲率图进行综合分析比较，从中发现用有限差分法所求得的数值解曲面, 其平均曲率的最大值和绝对平均曲率的平均值都比较接近于零, 因此它们都可以看作是近似的极小曲面. 在这些实例中，可以发现分母调和的情形绝对平均曲率更接近于零，更加逼近于有理Bézier极小曲面.

§4.1 低阶求解实例

实例 1. 给定所求曲面的控制顶点矩阵 $(\boldsymbol{P}_{kl})_{3\times3}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} (-1,2,0), & (-1,0,2.5), & (-1,-2,0) \\ (0,2,2), & unknown, & (0,-2,2) \\ (1,2,0), & (1,0,2.5), & (1,-2,0) \end{bmatrix}$$

给定权因子矩阵 $(W_{kl})_{3\times3}$ 如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2 \\ unknown, & unknown, & unknown \\ 2, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

分母调和的情形：

基于第二章中的算法，利用分母调和所求得的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 3, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成 5×5 控制网格，即 $M=5$ 时，需要求解 16 个线性方程，得到曲面上的 25 个点，把这些点连接起来就得到离散的调和的有理 Bézier 曲面图(4.1.1).

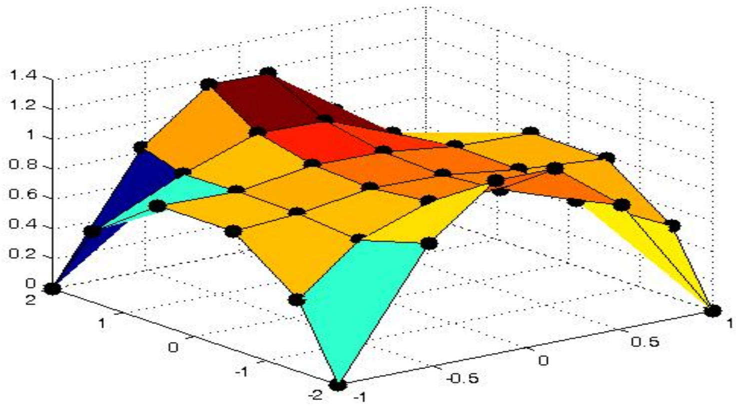


图 4.1.1

当曲面分成10×10控制网格，即$M=10$时，需要求解 81 个线性方程，得到曲面上的 121 个点，把这些点连接起来就得到划分 10 份的离散的调和的有理 Bézier 曲面图(4.1.2).

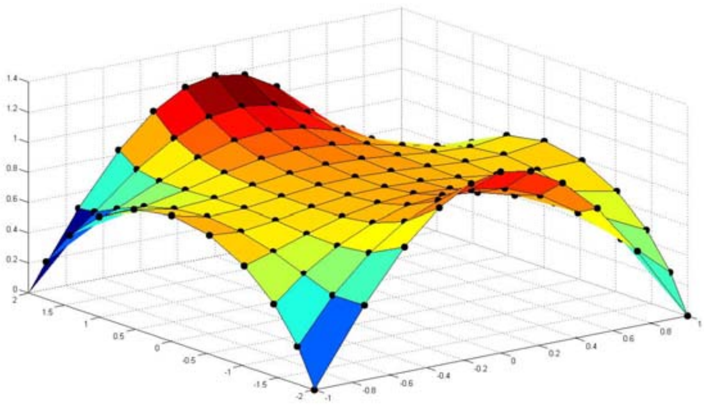


图 4.1.2

当划分的份数越多，所求的曲面越光滑. 为了从客观上分析所求出的曲面，就要分析该曲面的绝对平均曲率图，绝对平均曲率越小，所求出的曲面也就越接近于要求的极小曲面.

由微分几何的基本知识可知：曲面的平均曲率为$H=\dfrac{1}{2}\dfrac{LG-2MF+NE}{EG-F^2}$

其中：E,F,G 表示曲面 $\boldsymbol{R}$ 的第一类基本量；L,M,N 表示曲面 $\boldsymbol{R}$ 的第二类基本量.

$$L=\boldsymbol{R}_{uu}\cdot\vec{\mathbf{N}},M=\boldsymbol{R}_{uv}\cdot\vec{\mathbf{N}},L=\boldsymbol{R}_{vv}\cdot\vec{\mathbf{N}}.$$

$\vec{\mathbf{N}}$ 表示曲面 $\boldsymbol{R}$ 的法线量，具体表达式如下：

$$\vec{\mathbf{N}}=\frac{(\boldsymbol{R}_u\times\boldsymbol{R}_v)}{\left|\boldsymbol{R}_u\times\boldsymbol{R}_v\right|}=\frac{(\boldsymbol{R}_u\times\boldsymbol{R}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

作离散曲面时，是通过离散曲面求出曲面上点的值，但不能求出曲面的控制顶点，这也是造型方法的缺陷. 但是可以通过拟合来观察其曲率的总体变化趋势，具体做法如下：对于二次有理 Bézier 曲面，未知控制顶点是 $\boldsymbol{P}_{11}$.

取所求出的曲面上的一个非边界上的点值得到一个方程来求出 $\boldsymbol{P}_{11}$. 如曲面分成 10×10 控制网格时，可取 $u_1=0.5;v_1=0.5$，通过上述算法离散曲面，$\boldsymbol{R}(0.5,0.5)$ 是已知的.

通过 $\boldsymbol{R}(u,v)=\dfrac{\sum\limits_{i=0}^{i=2}\sum\limits_{j=0}^{j=2}B_i^2(u)B_j^2(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}}{\sum\limits_{i=0}^{i=2}\sum\limits_{j=0}^{j=2}B_i^2(u)B_j^2(v)w_{ij}}$ 可得一个线性方程:

$$\sum_{i=0}^{i=2}\sum_{j=0}^{j=2}B_i^2(0.5)B_j^2(0.5)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.5,0.5)\sum_{i=0}^{i=2}\sum_{j=0}^{j=2}B_i^2(0.5)B_j^2(0.5)w_{ij}$$

经整理可得：

$$\boldsymbol{P}_{11}=\frac{\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{R}(0.5,0.5)\sum\limits_{i=0}^{i=2}\sum\limits_{j=0}^{j=2}B_i^2(0.5)B_j^2(0.5)w_{ij}-\sum\limits_{i=0}^{2}\sum\limits_{\substack{j=0\\ j\neq1}}^{2}B_i^2(0.5)B_j^2(0.5)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}\\ \qquad-\sum\limits_{\substack{i=0\\ i\neq1}}^{2}B_i^2(0.5)B_1^2(0.5)w_{i1}\boldsymbol{P}_{i1}\end{array}\right]}{B_1^2(0.5)B_1^2(0.5)w_{11}}. \tag{4.1.1}$$

通过 (4.1.1)求出近似的 $\boldsymbol{P}_{11}=[\text{-}0.0444\quad 0.0584\quad \text{-}0.8756]$.依据平均曲率公式，得到该构造曲面的平均曲率图，从中观察出平均曲率的绝对变化程度如图 4.1.3.

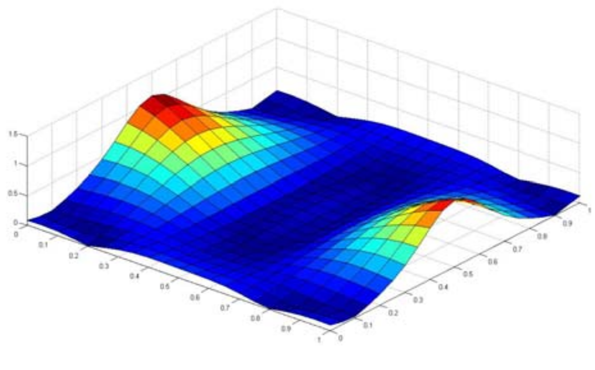


图 4.1.3

其它情形(权因子任意取):

权因子起到调整曲面形状的作用，曲面会向权因子较大的控制顶点鼓起. 虽然权因子是任意取的，但是权因子之间不能相差太大. 为了与调和情形形成对比，这里所取权因子之间相差不是很大，并且是对称的.

反例 1.1 ：

所取的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 6, & 1, & 6 \\ 2, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格，即$M=10$时，得到离散的曲面图 4.1.4 .

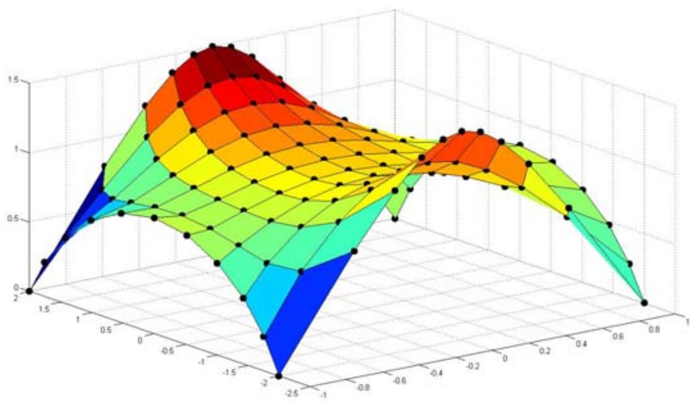


图 4.1.4

类似于调和情形，求出控制顶点$\boldsymbol{P}_{11}$的近似值[-0.4090　0.8340　-4.6080]，再求得其绝对平均曲率图 4.1.5：

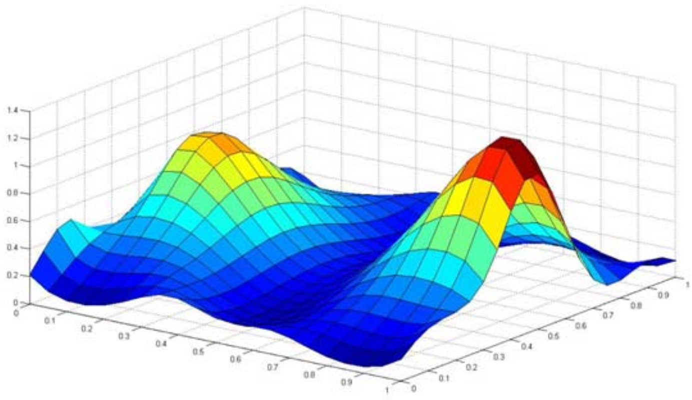


图 4.1.5

反例 1.2 :

所取的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2 \\ 5, & 3, & 5 \\ 2, & 1, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格，即$M=10$时，得到离散的曲面图 4.1.6 .

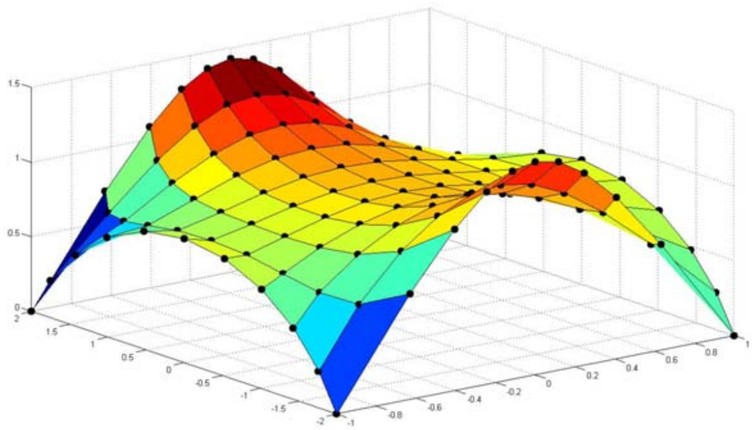


图 4.1.6

类似于调和情形，求出控制顶点近似值$\boldsymbol{P}_{11}=[-0.1874 \quad 0.0653 \quad -0.6445]$，

再得其绝对平均曲率图 4.1.7.

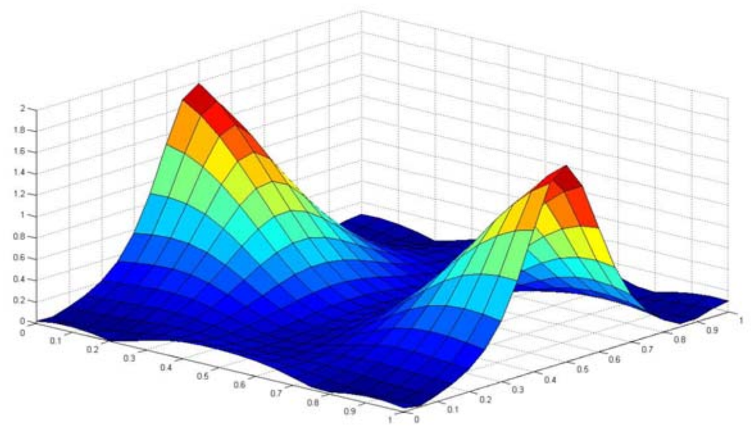


图 4.1.7

例 2:（三阶情形）

给定所求曲面的控制顶点矩阵$(\boldsymbol{P}_{kl})_{4\times4}$如下：

$$\begin{bmatrix} (-1, 2, 0), & (-1, 0, 2.72), & (-1, 0, -2.72), & (-1, -2, 0) \\ (-0.5, 2, 2), & unknown, & unknown, & (-0.5, -2, 2) \\ (0.5, 2 ,2), & unknown, & unknown, & (0.5, -2, 0) \\ (1, 2, 0), & (1, 0 ,2.72), & (1, 0 ,-2.72), & (1, -2, 0) \end{bmatrix}.$$

给定其权因子矩阵 $(W_{kl})_{4\times4}$ 如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown \\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown \\ 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \end{bmatrix}.$$

分母调和情形：

利用分母调和求得的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \\ 2.5, & 2, & 2, & 2.5 \\ 2.5, & 2, & 2, & 2.5 \\ 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格，即 $M=10$ 时，需要求解 81 个线性方程，得到曲面上的 121 个点，把这些点连接起来就得到划分 10 份的离散的调和的有理 Bézier 曲面图 4.1.8.

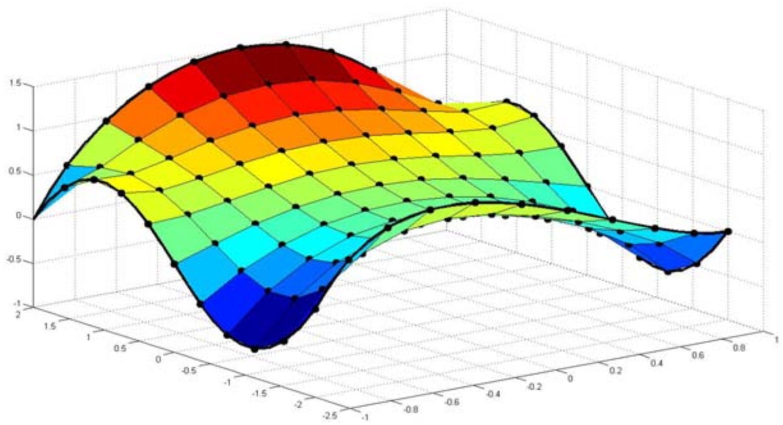


图 4.1.8

类似于二阶情形，通过拟合来观察其曲率的总体变化. 取所求的曲面上的非边界上的四个点的值组成方程组来求出近似的 $\boldsymbol{P}_{11}, \boldsymbol{P}_{12,} \boldsymbol{P}_{21}, \boldsymbol{P}_{22}$.

当将曲面划分为 3 份时，具体求解过程如下：

已知
$$u=\frac{1}{3},v=\frac{1}{3},\boldsymbol{R}(\frac{1}{3},\frac{1}{3});u=\frac{1}{3},v=\frac{2}{3},\boldsymbol{R}(\frac{1}{3},\frac{2}{3});$$
$$u=\frac{2}{3},v=\frac{1}{3},\boldsymbol{R}(\frac{2}{3},\frac{1}{3});u=\frac{2}{3},v=\frac{2}{3},\boldsymbol{R}(\frac{2}{3},\frac{2}{3}).$$

由 $\boldsymbol{R}(u,v)=\dfrac{\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(u)B_j^3(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(u)B_j^3(v)w_{ij}}$ 得一个线性方程组：

$$\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{1}{3})B_j^3(\frac{1}{3})w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{1}{3})B_j^3(\frac{1}{3})w_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{1}{3})B_j^3(\frac{2}{3})w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{1}{3})B_j^3(\frac{2}{3})w_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{2}{3})B_j^3(\frac{1}{3})w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(\frac{2}{3},\frac{1}{3})\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{2}{3})B_j^3(\frac{1}{3})w_{ij}$$

$$\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{2}{3})B_j^3(\frac{2}{3})w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(\frac{2}{3},\frac{2}{3})\sum_{i=0}^{i=3}\sum_{j=0}^{j=3}B_i^3(\frac{2}{3})B_j^3(\frac{2}{3})w_{ij}$$

有上述四个线性方程求出近似的 $\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{12,}\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22}$ 值如下:

$\boldsymbol{P}_{11}$=[-0.4904 0.3663 0.4298],
$\boldsymbol{P}_{12}$=[-0.4776 -0.2238 0.3813],
$\boldsymbol{P}_{21}$=[0.4580 0.3170 -0.0539],
$\boldsymbol{P}_{22}$=[0.4303 -0.2103 0.4835].

从而得到其绝对平均曲率图 4.1.9：

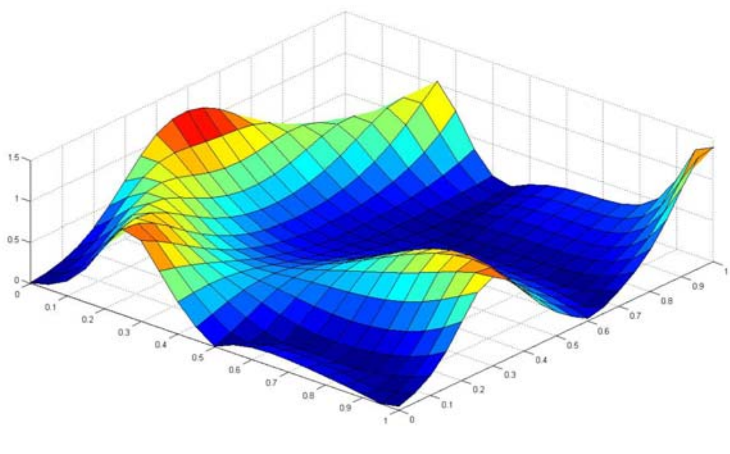


图 4.1.9

其他情形:

反例 2.1

所取的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \\ 5, & 4, & 4, & 5 \\ 5, & 4, & 4, & 5 \\ 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成5×5控制网格，即$M=5$时，需要求解 16 个线性方程，得到曲面上的 25 个点，把这些点连接起来就得到划分 5 份的离散的调和的有理 Bézier 曲面图 4.1.10.

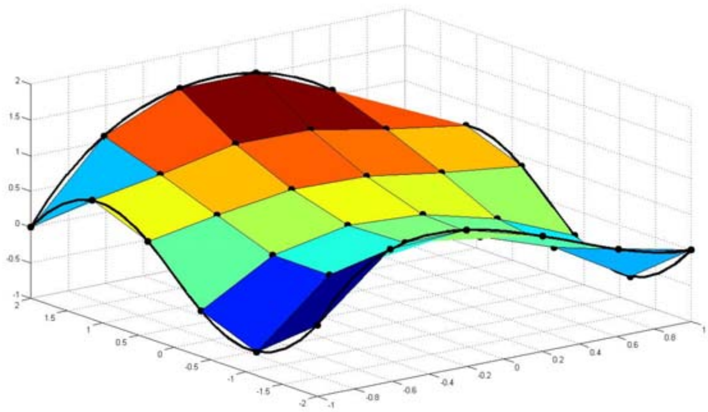


图 4.1.10

当曲面分成10×10控制网格，即$M=10$时，需要求解 81 个线性方程，得到曲面上的 121 个点，把这些点连接起来就得到划分 10 份的离散的调和的有理 Bézier 曲面图 4.1.11.

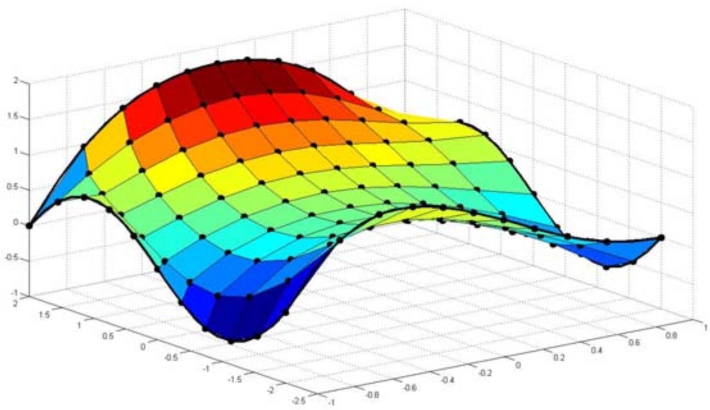


图 4.1.11

求得其未知控制顶点$\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{12,}\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22}$近似值如下:

$\boldsymbol{P}_{11}$=[-0.5631 0.3813 1.1635],
$\boldsymbol{P}_{12}$=[-0.6003 -0.2207 1.5255],
$\boldsymbol{P}_{21}$=[0.4405 0.2883 0.3882],
$\boldsymbol{P}_{22}$=[0.4085 -0.2004 0.2301].

进而得到其绝对平均曲率图 4.1.12：

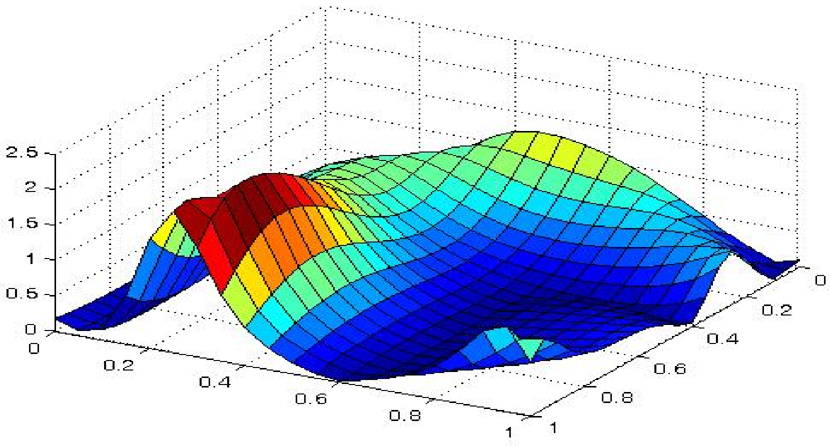


图 4.1.12

反例 2.2

所取的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \\ 1.5, & 1, & 1, & 1.5 \\ 1.5, & 1, & 1, & 1.5 \\ 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格，即 $M=10$ 时，得到其曲面图 4.1.13 .

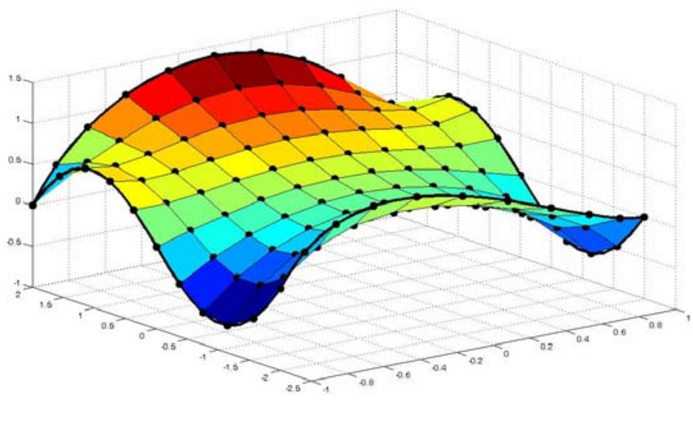


图 4.1.13

求得其未知控制顶点 $\boldsymbol{P}_{11}, \boldsymbol{P}_{12}, \boldsymbol{P}_{21}, \boldsymbol{P}_{22}$ 近似值如下:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{11} &= [0.0736 \quad -0.0297 \quad -0.0172],\\ \boldsymbol{P}_{12} &= [0.2914 \quad 0.2901 \quad -1.2228],\\ \boldsymbol{P}_{21} &= [-0.1180 \quad 0.0954 \quad -1.1729],\\ \boldsymbol{P}_{22} &= [-0.4537 \quad 0.3990 \quad 2.4958].\end{aligned}$$

进而可以得到其绝对平均曲率图 4.1.14：

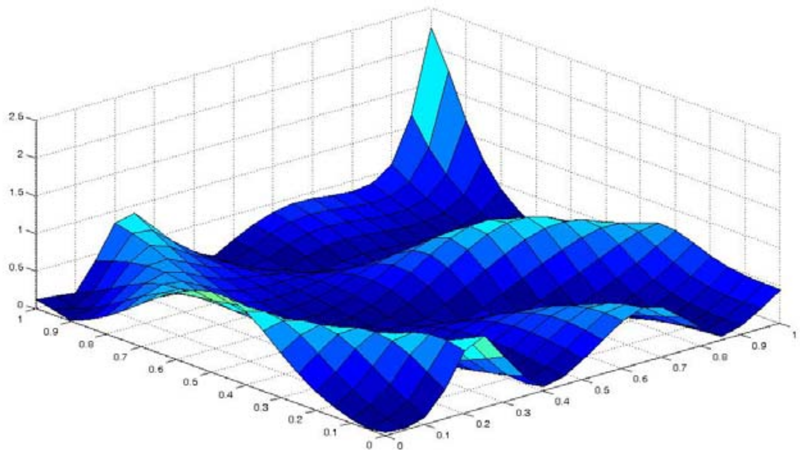


图 4.1.14

实例 3 (四阶情形)

给定所求曲面的控制顶点矩阵 $(\boldsymbol{P}_{kl})_{5\times5}$ 如下：

$$\begin{bmatrix} (0,0,0), & (1,0,0), & (2,0,0), & (3,0,0), & (4,0,0)\\ (0,1,0), & unknown, & unknown, & unknown, & (4,1,0.5)\\ (0,2,0), & unknown, & unknown, & unknown, & (4,2,1)\\ (0,3,0), & unknown, & unknown, & unknown, & (4,3,0.5)\\ (0,4,0), & (1,4,0.5), & (2,4,1), & (3,4,0.5), & (4,4,0.2) \end{bmatrix}.$$

给定的权因子矩阵 $(W_{kl})_{5\times5}$ 如下：

$$\begin{bmatrix} 1.5, & 1, & 1, & 1, & 1.5\\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown, & unknown\\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown, & unknown\\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown, & unknown\\ 1.5, & 1, & 1, & 1, & 1.5 \end{bmatrix}.$$

调和情形：

利用分母调和所求的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1.5, & 1, & 1, & 1, & 1.5 \\ 2.5, & 1.625 & 1.5 & 1.625 & 2.5 \\ 3, & 2, & 1.8333, & 2, & 3 \\ 2.5, & 1.625, & 1.5, & 1.625, & 2.5 \\ 1.5, & 1, & 1, & 1, & 1.5 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格，即$M=10$时，需要求解 81 个线性方程，得到曲面上的 121 个点，把这些点连接起来就得到划分 10 份的离散的调和的有理 Bézier 曲面图 4.1.15.

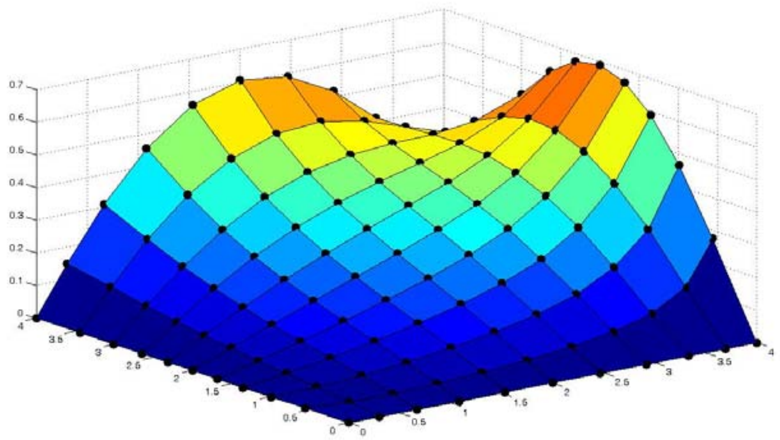


图 4.1.15

类似于三阶情形，通过拟合来观察其曲率的总体变化. 取所求出的曲面上的非边界上的九个点的值组成方程组来求出近似的$\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{12,}\boldsymbol{P}_{13},\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22},\boldsymbol{P}_{23},\boldsymbol{P}_{31},\boldsymbol{P}_{32,}\boldsymbol{P}_{33}$.

如将曲面分成 10 份时：

$$u=0.2,v=0.3,\boldsymbol{R}(0.2,0.3);u=0.2,v=0.5,\boldsymbol{R}(0.2,0.5);$$
$$u=0.2,v=0.7,\boldsymbol{R}(0.2,0.7);u=0.5,v=0.2,\boldsymbol{R}(0.5,0.2);$$
已知$u=0.5,v=0.2,\boldsymbol{R}(0.5,0.2);u=0.5,v=0.5,\boldsymbol{R}(0.5,0.5);$
$$u=0.5,v=0.8,\boldsymbol{R}(0.5,0.8);u=0.8,v=0.3,\boldsymbol{R}(0.8,0.3);$$
$$u=0.8,v=0.7,\boldsymbol{R}(0.8,0.7).$$

由$\boldsymbol{R}(u,v)=\dfrac{\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(u)B_j^4(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(u)B_j^4(v)w_{ij}}$可得九个线性方程：

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.2)B_j^4(0.3)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.2,0.3)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.2)B_j^4(0.3)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.2)B_j^4(0.5)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.2,0.5)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.2)B_j^4(0.5)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.2)B_j^4(0.7)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.2,0.7)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.2)B_j^4(0.7)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.5)B_j^4(0.2)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.5,0.2)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.5)B_j^4(0.2)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.5)B_j^4(0.5)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.5,0.5)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.5)B_j^4(0.5)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.5)B_j^4(0.8)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.5,0.8)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.5)B_j^4(0.8)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.8)B_j^4(0.3)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.8,0.3)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.8)B_j^4(0.3)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.8)B_j^4(0.5)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.8,0.5)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.8)B_j^4(0.5)w_{ij}.$$

$$\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.8)B_j^4(0.7)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}=\boldsymbol{R}(0.8,0.7)\sum_{i=0}^{i=4}\sum_{j=0}^{j=4}B_i^4(0.8)B_j^4(0.7)w_{ij}.$$

求解上述九个线性方程求出 $\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{12,}\boldsymbol{P}_{13},\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22},\boldsymbol{P}_{23},\boldsymbol{P}_{31},\boldsymbol{P}_{32,}\boldsymbol{P}_{33}$ 如下:

$\boldsymbol{P}_{11}$=[1.0000 1.0000 -0.4318],
$\boldsymbol{P}_{12}$=[2.0000 1.0000 1.2335],
$\boldsymbol{P}_{13}$=[3.0000 1.0000 -0.9739],
$\boldsymbol{P}_{21}$=[1.0000 2.0000 0.5654],
$\boldsymbol{P}_{22}$=[2.0000 2.0000 -0.5270],
$\boldsymbol{P}_{23}$=[3.0000 2.0000 1.2616],
$\boldsymbol{P}_{31}$=[1.0000 3.0000 0.0282],
$\boldsymbol{P}_{32}$=[2.0000 3.0000 0.5935],
$\boldsymbol{P}_{33}$=[3.0000 3.0000 0.0741].

进而得到其绝对平均曲率图 4.1.16.

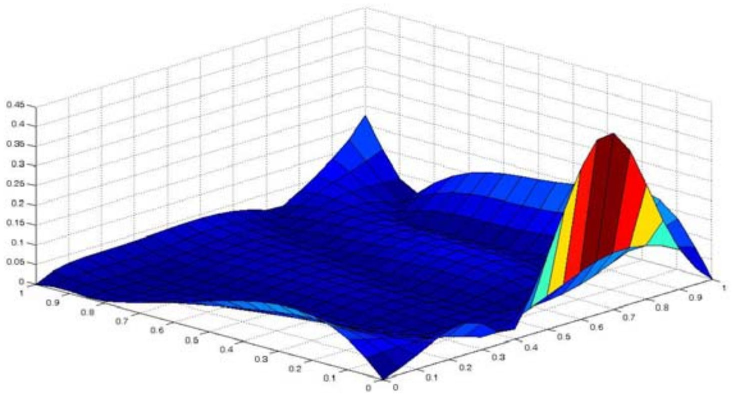


图 4.1.16

其它情形：

反例 3.1：

所取的权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1.5, & 1, & 1, & 1, & 1.5 \\ 3, & 2, & 1.5, & 2, & 3 \\ 4, & 3, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 2, & 1.5, & 2, & 3 \\ 1.5, & 1, & 1, & 1, & 1.5 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格，即$M=10$时，需要求解 81 个线性方程， 从而得到曲面上的 121 个曲面上的点的值，可得到离散的有理调和 Bézier 曲面图 4.1.17 .

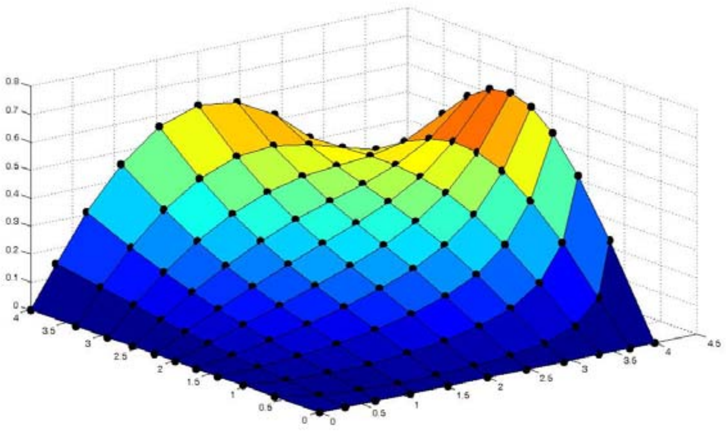


图 4.1.17

类似于调和情形，求出其九个控制顶点$\boldsymbol{P}_{11},\boldsymbol{P}_{12,}\boldsymbol{P}_{13},\boldsymbol{P}_{21},\boldsymbol{P}_{22},\boldsymbol{P}_{23},\boldsymbol{P}_{31},\boldsymbol{P}_{32,}\boldsymbol{P}_{33}$的值如下：

$$\boldsymbol{P}_{11}=[1.0001\quad -0.0782\quad -0.4336],$$
$$\boldsymbol{P}_{21}=[0.9999\quad 2.3504\quad 0.5163],$$
$$\boldsymbol{P}_{31}=[1.0001\quad 3.1551\quad 0.1376],$$
$$\boldsymbol{P}_{12}=[1.9998\quad 0.3776\quad 1.0735],$$
$$\boldsymbol{P}_{22}=[2.0003\quad 1.9467\quad -0.5867],$$
$$\boldsymbol{P}_{32}=[1.9998\quad 3.0074\quad 0.8264],$$
$$\boldsymbol{P}_{13}=[3.0003\quad -0.0782\quad -1.0682],$$
$$\boldsymbol{P}_{23}=[2.9996\quad 2.3504\quad 1.4330],$$
$$\boldsymbol{P}_{33}=[3.0003\quad 3.1551\quad 0.0494].$$

从而得到其曲面的绝对平均曲率图 4.1.18：

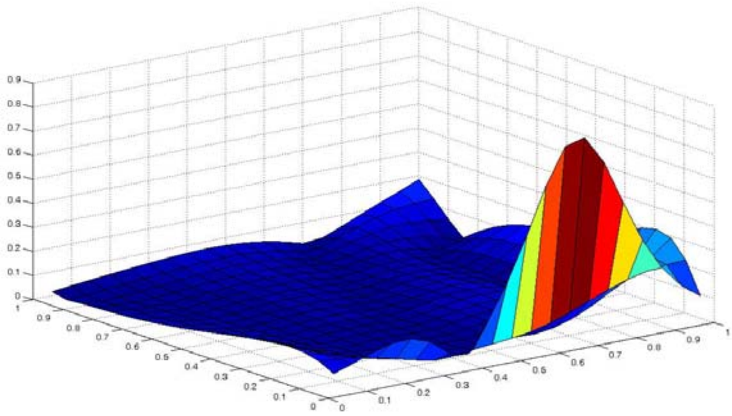


图 4.1.18

这节中只给出了所求出的曲面图，虽然给出了其对应的绝对平均曲率图，但没有从客观上加以分析.

§4.2 曲率图的综合分析

首先要说明的是：作平均曲率图时，将曲面分成21×21的网格，得到曲面上的 441 个绝对平均曲率的值.

注：W 表示未知的权因子；M 表示绝对平均曲率的最大值；A 表示绝对平均曲率的平均值；P 表示概率，可以定义为满足条件的曲率面上的点的个数比上总的个数 441；F 表示曲面情况；I 表示分母调和情形；II 和 III 分别表示其他两种权因子任意取的情形，H 表示绝对平均曲率.

第一组实例(二阶)：

调和情形(I)中 H 的最大值小于 II 和 III 的最大值，并且 I 中 H 的平均值小于 II 和 III 中的.

从统计的角度来说:

对于情形 I， $H<0.05$ 的概率为 22.68%，$H<0.1$ 的概率为 60.32%,，$H<0.5$ 的概率为 85.49%， $H>1$ 的概率为 1.59% ；

而对于情形 II， $H<0.05$ 的概率为 1.81%， $H<0.1$ 的概率为 10.20%，$H<0.5$ 的概率为 77.78%， $H>1$ 的概率为 3.40%；

对于情形 III， $H<0.05$ 的概率为 11.11%， $H<0.1$ 的概率为 32.20%，$H<0.5$ 的概率为 76.87%， $H>1$ 的概率为 9.52%.

从上述数据中可以看出情形 I 要比情形 II 和 III 要好，其 $H<0.5$ 的概率就有 85.49%，有 22.68%的 $H<0.05$ 很逼近于零，较 II 和 III 更接近于要求的有理 Bézier 调和曲面.

表 一：

F	W	M	A	$P(H<0.05)$	$P(H<0.1)$
I	[3, 2, 3]	1.1279	0.2299	$\frac{100}{441}$	$\frac{266}{441}$
II	[6, 1, 6]	1.3458	0.3464	$\frac{8}{441}$	$\frac{45}{441}$
III	[5, 3, 5]	1.8460	0.3463	$\frac{49}{441}$	$\frac{142}{441}$

F	$P(H<0.5$	$P(H>=0.5)$	$P(H>=1)$	$Ideal(H)$
I	$\frac{377}{441}$	$\frac{64}{441}$	$\frac{7}{441}$	0
II	$\frac{343}{441}$	$\frac{98}{441}$	$\frac{15}{441}$	0
III	$\frac{339}{441}$	$\frac{102}{441}$	$\frac{42}{441}$	0

第二组实例(三阶)：

调和情形(I)中 H 的最大值小于 II 和 III 的最大值，并且相差挺大. I 中 H 的平均值小于 II 中的，I 中 H 的平均值和 II 中 H 的平均值相差很小，但是 II 中 H 的最大值是 2.2319.

从统计的角度来说:

对于情形 I，$H < 0.05$ 的概率为 11.11%，$H < 0.1$ 的概率为 21.32%,，$H < 0.5$ 的概率为 68.71%，$H > 1$ 的概率为 3.85% ；

而对于情形 II，$H < 0.05$ 的概率为 8.62%，$H < 0.1$ 的概率为 19.95%，$H < 0.5$ 的概率为 60.09%，$H > 1$ 的概率为 14.74%;

对于情形 III，$H < 0.05$ 的概率为 9.75%，$H < 0.1$ 的概率为 19.27%，$H < 0.5$ 的概率为 71.66%，$H > 1$ 的概率为 1.59%.

从上述数据中可以看出情形 I 要比情形 II 明显的好，和 III 相比相差不大，但是 III 得 H 极值太大了，I 中 $H < 0.1$ 和 $H < 0.05$ 的概率都比 III 大，总体来说 I 还是要好一些的. I 中 $H < 0.5$ 的概率就有 60.09%，有 11.11%的 $H < 0.05$ 很逼近于零，较 II 和 III 更接近于要求的有理 Bézier 调和曲面.

在表二中，W_1, W_2, W_3 可以表示成如下形式：

$$W_1 = \begin{bmatrix} 2.5, & 2, & 2, & 2.5 \\ 2.5, & 2, & 2, & 2.5 \end{bmatrix}; W_2 = \begin{bmatrix} 5, & 4, & 4, & 5 \\ 5, & 4, & 4, & 5 \end{bmatrix}; W_3 = \begin{bmatrix} 1, & 1.5, & 1, & 1.5 \\ 1, & 1.5, & 1, & 1.5 \end{bmatrix}.$$

表二：

F	W	M	A	$P(H < 0.05)$	$P(H < 0.1)$
I	W_1	1.3894	0.3811	$\frac{49}{441}$	$\frac{94}{441}$
II	W_2	2.1195	0.5041	$\frac{38}{441}$	$\frac{88}{441}$
III	W_3	2.2319	0.3874	$\frac{43}{441}$	$\frac{85}{441}$

F	$P(H<0.5)$	$P(H>=0.5)$	$P(H>=1)$	$Ideal(H)$
I	$\frac{303}{441}$	$\frac{138}{441}$	$\frac{17}{441}$	0
II	$\frac{265}{441}$	$\frac{176}{441}$	$\frac{65}{441}$	0
III	$\frac{316}{441}$	$\frac{125}{441}$	$\frac{7}{441}$	0

第三组实例(四阶)：

调和情形(I)中 H 的最大值小于 II 中 H 的最大值，并且相差挺大. I 中 H 的平均值小于 II 中的，并且 II 中 H 的平均值基本上是 I 中的 2 倍，从这点来看情形 I 是很逼近于极小曲面的.

从统计的角度来说:

对于情形 I， $H<0.05$ 的概率为 78.68%，$H<0.1$ 的概率为 90.70%，$H<0.5$ 的概率为 100%，$H>1$ 的概率为 0% ；

而对于情形 II， $H<0.05$ 的概率为 69.84%， $H<0.1$ 的概率为 82.09%，$H<0.5$ 的概率为 95.24%，$H>1$ 的概率为 3.17;

从上述数据中可以看出情形 I 要比情形 II 明显的好， I 中 $H<0.05$ 的概率就有 78.68%，$H<0.5$ 的概率为 100%，$H>1$ 的概率为 0%，从而可知情形 I 比情形 II 更接近于要求的有理 Bézier 调和曲面.

在表三中，W_1,W_2,W_3 可以表示成如下形式：

$$W_1=\begin{bmatrix}2.5, & 1.625, & 1.5, & 1.625, & 2.5\\ 3, & 2, & 1.8333, & 2, & 3\\ 2.5, & 1.625, & 1.5, & 1.625, & 2.5\end{bmatrix}, W_2=\begin{bmatrix}3, & 2, & 1.5, & 2, & 3\\ 4, & 3, & 2, & 3, & 4\\ 3, & 2, & 1.5, & 2, & 3\end{bmatrix}.$$

表三：

F	W	M	A	$P(H<0.05)$	$P(H<0.1)$
I	W_1	0.4486	0.0382	$\frac{347}{441}$	$\frac{400}{441}$
II	W_2	1.1346	0.3123	$\frac{308}{441}$	$\frac{362}{441}$

F	$P(H<0.5)$	$P(H>=0.5)$	$P(H>=1)$	$Ideal(H)$
I	$\frac{441}{441}$	$\frac{0}{441}$	$\frac{0}{441}$	0
II	$\frac{420}{441}$	$\frac{21}{441}$	$\frac{14}{441}$	0

基于上述三个表格的分析，可知分母调和情形所构造出来有理 Bézier 调和曲面其绝对平均曲率变化小，更逼近于极小曲面. 在上述的造型过程中，为了保证所构造曲面的凸包性质并避免 $w(u,v)=0$，常规定 $w_{ij}>0$. 对于有理 Bézier 调和曲面，权因子设计有着很重要的作用.实验表明: w_{ij} 增大时曲面会向控制顶点 $\boldsymbol{P}_{ij}$ 靠近，从而调整曲面形状.

在实际的造型中，为了保证所构造的曲面比较平坦, 要求权因子要匀称，不能相差太大. 在理论上，对于给定四条有理 Bézier 边界的控制顶点及第一排和最后一排权因子，利用 $\boldsymbol{Y}=\sum_{i=0}^{i=n}\sum_{j=0}^{j=n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}$ 调和所求出的权因子分布比较均匀，相差不会很大，这样就可以保证所求出的曲面不会很扭曲.

对于上述反例，所取的对称权因子相差不是很大，那么如果中间权因子取的是对称但相差很大时造型曲面会怎样呢？

给定所求曲面的控制顶点矩阵 $\left\{\boldsymbol{P}_{kl}\right\}_{k,l=0}^{4}$ 如下:

$$\begin{bmatrix} \text{(-1, 2, 0)}, & \text{(-1, 0, 2.72)}, & \text{(-1, 0, -2.72)}, & \text{(-1, -2, 0)} \\ \text{(-0.5, 2, 2)}, & unknown, & unknown, & \text{(-0.5, -2, 2)} \\ \text{(0.5, 2, 2)}, & unknown, & unknown, & \text{(0.5, -2, 0)} \\ \text{(1, 2, 0)}, & \text{(1, 0, 2.72)}, & \text{(1, 0, -2.72)}, & \text{(1, -2, 0)} \end{bmatrix}.$$

给定的权因子矩阵 $\left\{W_{kl}\right\}_{k,l=0}^{4}$ 如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown \\ unknown, & unknown, & unknown, & unknown \\ 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \end{bmatrix}.$$

取权因子矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \\ 9, & 1, & 1, & 9 \\ 9, & 1, & 1, & 9 \\ 2, & 1.5, & 1.5, & 2 \end{bmatrix}.$$

当曲面分成10×10控制网格,即$M=10$时，得到离散的有理调和 Bézier 曲面图 4.2.1 .

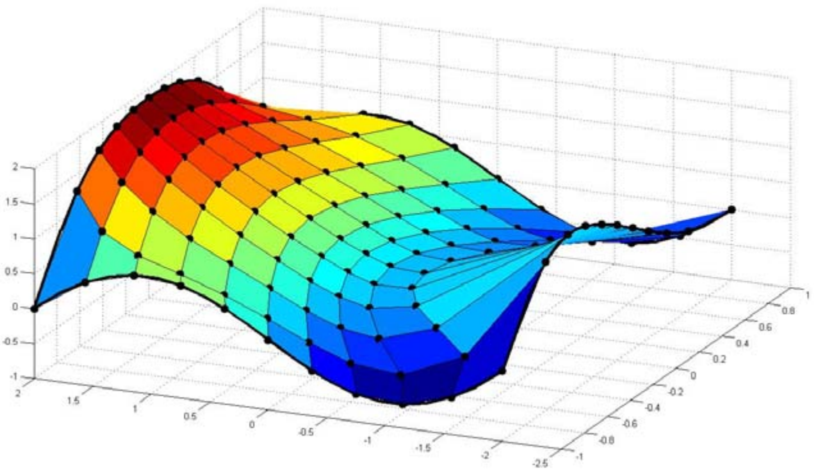


图 4.2.1

很容易看出其曲面不是很平坦，有些扭曲，由于$W_{10},W_{20},W_{13},W_{23}$比较大，曲面就会向着$\boldsymbol{P}_{10},\boldsymbol{P}_{20},\boldsymbol{P}_{13},\boldsymbol{P}_{23}$鼓起，使得在这几个点的绝对平均曲率变化大. 这种情形下即使曲面大部分绝对平均曲率很小,但是其绝对平均曲率的最大值会很大.

给定有理 Bézier 曲面控制边界，求解基于该边界的面积最小的曲面，需要求解曲面的$E-L$方程. 而对于求解其$E-L$方程有很多方法. 本文中采用分而治之的方法，先使得分母调和，即

$(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})=0$，这时(3.2.2)中 $-(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})\boldsymbol{XY}=0$. 从而使得所构造的有理 Bézier 曲面更接近于有理 Bézier 极小曲面. 权因子任意时，$(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})$不是恒等于零，使得多构造出的曲面绝对平均曲率变化大，这一点可以由前面的实例加以证明.

第五章 总结和展望

本文采用有限差分方法成功地解决了有理 Bézier 调和曲面的造型问题，通过数值试验验证了该算法的可行性. 当曲面划分的网格数越多,其解就越接近于极小曲面. 当划分的份数很多时，虽然精度高了，但计算量会增大. 此方法适用于任意阶的有理 Bézier 调和曲面的造型问题，其求解过程很简单，与低阶类似，都是求解一个线性方程组.

虽然这种方法比较简单，但是基于所求的曲面进行差分离散，求解线性方程组所得到的是曲面上的点，而不是其曲面的控制顶点. 另外一方面，基于 Plateau- Bézier 问题的研究成果，本文着重探索了分母调和的情形. 通过三组实例综合分析，可知分母调和情形下所构造出的有理 Bézier 调和曲面最接近于极小曲面. 本文对有理 Bézier 极小曲面的求解算法加以说明，没有给出严谨的证明. 我尝试过对此加以证明，但是还没有满意的结果，关于这一点是以后的研究目标之一.

我认为今后的工作可以考虑以下几个方面:

第一: 由于有理极小曲面问题的高度非线性, 解决方案一般要采用非线性的方法. 具体来说, 有理极小曲面问题最后要转换为一个线性约束条件下的有限维变量的非线性目标函数最小化问题. 因此, 如何寻找各种不同且适当的线性化策略将该类非线性问题转化为某些线性问题, 乃是一个需要着重研究的方向.

第二: 本文用有限差分方法解决有理Bézier极小曲面造型时, 理论对象来自于分片连续的函数空间. 因此, 可以考虑将此方法直接推广到有理Bézier双调和的曲面设计，也可以将其推广到有理B样条，即将有限差分方法推广到有理B样条极小曲面的设计中.

第三: 从本质上说, 有限差分方法是一种离散数据建模方法. 就目前的计算机表示方法而言, 越来越多的几何造型和图形表示都需要借助于离散化曲面模型. 当使用有限差分方法构造现代建筑中的顶棚、网架、框梁时, 我们所使用的测量数据都是离散的, 而这些建筑的外形曲面实际拼接也是离散的. 因此, 研究离散化的极小曲面非常必要. 具体地说, 我们应该关注网格曲面、细分曲面等离散极小曲面的研究.

后记

本人在探索有理 Bézier 调和曲面造型的过程中，最先想到的是直接利用求导的方法，求导后，将所求的有理多项式升阶成同次数的有理 Bézier 曲面，再利用 Bézier 基的线性无关性得出相应的结论. 在推导的过程中，发现直接做$n\times n$阶的情形是很困难的. 这时开始尝试低阶情形. 对于二次情形，我做了比较细致的推导.

二阶有理 Bézier 曲面的一般表示形式为：$\boldsymbol{R}=\dfrac{\sum_{i=0}^{i=2}\sum_{j=0}^{j=2}B_i^2(u)B_j^2(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}}{\sum_{i=0}^{i=2}\sum_{j=0}^{j=2}B_i^2(u)B_j^2(v)w_{ij}}$.

记其分子，分母为

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}\boldsymbol{P}_{ij}$$

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}B_i^n(u)B_j^n(v)w_{ij}$$

利用 Bézier 基与幂基之间的相互转换关系：$(\boldsymbol{B_0^2},\boldsymbol{B_1^2},\boldsymbol{B_2^2})=(1,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u^2})\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{bmatrix}$

将分子分母分别转化为幂基形式：

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=0}^{i=2}\sum_{j=0}^{j=2}u^iv^j\boldsymbol{a}_{ij}$$

$$\boldsymbol{Y}=\sum_{i=0}^{i=2}\sum_{j=0}^{j=2}u^iv^j\boldsymbol{b}_{ij}$$

其中$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a_{00}}&\boldsymbol{a_{01}}&\boldsymbol{a_{02}}\\\boldsymbol{a_{10}}&\boldsymbol{a_{11}}&\boldsymbol{a_{12}}\\\boldsymbol{a_{20}}&\boldsymbol{a_{21}}&\boldsymbol{a_{22}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{00}\boldsymbol{P}_{00}&w_{01}\boldsymbol{P}_{01}&w_{02}\boldsymbol{P}_{02}\\w_{10}\boldsymbol{P}_{10}&w_{11}\boldsymbol{P}_{11}&w_{12}\boldsymbol{P}_{12}\\w_{20}\boldsymbol{P}_{20}&w_{21}\boldsymbol{P}_{21}&w_{22}\boldsymbol{P}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_{00}&\boldsymbol{b}_{01}&\boldsymbol{b}_{02}\\\boldsymbol{b}_{10}&\boldsymbol{b}_{11}&\boldsymbol{b}_{12}\\\boldsymbol{b}_{20}&\boldsymbol{b}_{21}&\boldsymbol{b}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{00}&w_{01}&w_{02}\\w_{10}&w_{11}&w_{12}\\w_{20}&w_{21}&w_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&2&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

由$\boldsymbol{R}_{uu}+\boldsymbol{R}_{vv}=0$可得

$$(\boldsymbol{X}_{uu}+\boldsymbol{X}_{vv})\boldsymbol{Y}^2-\boldsymbol{XY}(\boldsymbol{Y}_{uu}+\boldsymbol{Y}_{vv})-2\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{Y}_u+\boldsymbol{X}_v\boldsymbol{Y}_v)+2\boldsymbol{X}(\boldsymbol{Y}_u^2+\boldsymbol{Y}_v^2)=0 \quad (*)$$

将分子表示成矩阵形式：

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & u & u^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & v & v^2\end{bmatrix}'.$$

对于分母：

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}1 & u & u^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{00} & b_{01} & b_{02}\\ b_{10} & b_{11} & b_{12}\\ b_{20} & b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & v & v^2\end{bmatrix}'.$$

$\boldsymbol{X}_u,\boldsymbol{X}_v,\boldsymbol{X}_{uu},\boldsymbol{X}_{vv},\boldsymbol{X}_{uv}$， $\boldsymbol{Y}_u,\boldsymbol{Y}_v,\boldsymbol{Y}_{uu},\boldsymbol{Y}_{vv},\boldsymbol{Y}_{uv}$ 也有类似矩阵表示.

利用上述(*)式得到一个方程，易知(*)式中 u 的最高次数为 6，v 的最高次数也为 6. (*)式中 u,v 的各种组合如下：

$$\begin{bmatrix}1 & u & u^2 & u^3 & u^4 & u^5 & u^6\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}1 & v & v^2 & v^3 & v^4 & v^5 & v^6\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}1 & v & v^2 & v^3 & v^4 & v^5 & v^6\\ u & uv & uv^2 & uv^3 & uv^4 & uv^5 & uv^6\\ u^2 & u^2v & u^2v^2 & u^2v^3 & u^2v^4 & u^2v^5 & u^2v^6\\ u^3 & u^3v & u^3v^2 & u^3v^3 & u^3v^4 & u^3v^5 & u^3v^6\\ u^4 & u^4v & u^4v^2 & u^4v^3 & u^4v^4 & u^4v^5 & u^4v^6\\ u^5 & u^5v & u^5v^2 & u^5v^3 & u^5v^4 & u^5v^5 & u^5v^6\\ u^6 & u^6v & u^6v^2 & u^6v^3 & u^6v^4 & u^6v^5 & u^6v^6\end{bmatrix} \qquad (**)$$

有理 Bezier 曲面调和充要条件是(*)式恒等于 0，利用幂基的线性无关性可知, 要使(*)恒等于 0 的充要条件是(**)中的每一项的系数恒等于零.

从而得到方程如下：

h00 =-4*x10*(-2+2*w10)-4*x10-20

$$h01=-4*x10*(-4-4*w10+4*w11)-8*x10+32-8*x11-8*x10*(-2+2*w10)$$
$$-(-8*x10-16+8*x11)*(-2+2*w10)+16*w10+8*(-2+2*w10)^2$$

$$h03=8*(-4-4*w10+4*w11)^2+16*x10+56-16*x12-(-8*x10-16+8*x11)$$
$$*(4+2*w10-4*w11+2*w12)+16*w11+(-32+32*w10)*(4+2*w10-4*w11+2*w12)$$
$$+8*x10*(-4-4*w10+4*w11)+16*w12-(4*x10+8-8*x11+4*x12)*$$
$$(-4-4*w10+4*w11)+32*x11-(8*x10+16-16*x11+8*x12)*(-2+2*w10)-80*w10$$
$$-(-16*x10-32+16*x11)*(-4-4*w10+4*w11)+(16-16*w10)*(-4-4*w10+4*w11)$$
$$+2*(-8*x10-16+8*x11)*(-2+2*w10)-8*x10*(4+2*w10-4*w11+2*w12)$$

类似地, 可得所有的系数阵如下：

$$h_{20},h_{21},h_{22},h_{23},h_{24},h_{25},h_{26};$$
$$h_{30},h_{31},h_{32},h_{33},h_{34},h_{35},h_{36};$$
$$h_{40},h_{41},h_{42},h_{43},h_{44},h_{45},h_{46};$$
$$h_{50},h_{51},h_{52},h_{53},h_{54},h_{55},h_{56};$$
$$h_{60},h_{61},h_{62},h_{63},h_{64},h_{65},h_{66}.$$

其中 $h_{44},h_{45},h_{46},h_{54},h_{55},h_{56},h_{64},h_{65},h_{66}$ 为零， h_{ij} 表示(**)矩阵中 $u^i v^j$ 的系数.

曲面 $\boldsymbol{R}(u,v)$ 调和 $\Leftrightarrow$ $h_{ij}==0\,(i,\,j=0,1,......6)$.

这样就会产生 40 个非线性方程所组成的方程组. 别说是求解，即使判断这个方程组是否有解都是很困难的.

参考文献

[Euler, 1744] Euler, 寻求具有某种极大或极小性质的曲线的 (Methodus inveniendi lineas curves maximi minimive proprietate gaudentes), Berlin Press, 1744.

[Nitsche,1988] J.C.C.Nitsche,Lectures on Minimal Surface Volume 1,Cambridge University Press,1988.

[GIL BARG,1983] Gilbarf and N.Trudinger,EIIiptic partial differential equations of second order(2ndEdition),Springer-Verlag,Berlin-HeidelbergNew York,1984.

[Rado,1930] Rado,On Plateau's problem,Ann.of Math.(2)31(1930),457-469.

[Douglas,1931] DJ.Douglas,Solution of the problem ofPlateau,Teans. AMS.33(1931),263-321.

[Osserman,1986] Osserman.R,1986.A Survey of Minimal Surfaces.Docer,New York.

[Maurin, Motro,1997] MAURIN B, MOTRO R. Investigation of minimal forms with density methods[J]. Journal of the International Association for Steel and Spatial Structures. IASS, 1997, 38:143-154.

[Peterson,1998] The Mathematical Touridt,The Deformation of the Space Free -man,1988,61-95.

[MVQ, 1998] C. Mandal, B.C. Vemuri, and H. Qin, Shape Recovery Using Dynamic Subdivision Surfaces, Proc. Int'l Conf. Computer Vision, Jan. 1998, pp. 805-810.

[MQV, 1997] C. Mandal, H. Qin, and B.C. Vemuri, Dynamic Smooth Subdivision Surfaces for Data Visualization, Proc. IEEE Visualization '97, Oct. 1997, pp. 371-377.

[MQV, 2000a] C. Mandal, H. Qin, and B.C. Vemuri, Dynamic Modeling Butterfly Subdivision Surfaces, Tran. Vis. Comp. Graph., 2000, 265-286

[MQV, 2000b] Mandal, C.; Qin, H.; Vemuri, B.C.A novel FEM-based dynamic framework for subdivision surfaces Computer-Aided Design, 32, 2000, 479-497.

[Lagrange,1788] Lagrange,分析力学(Mecanique Analytique),1788.

[Monge,1794] Monge,画法几何学(Descriptive Geometry),1794,[Nitsche,1988] J.C.C.Nitsche,Lectures on Minimal Surface Volume 1,Cambridge University Press,1988.

[Plateau,1873] Plateau,实验和理论流体静力学，1873.

[M.Struwe,1988] M.Struwe:Plateau’s problem and the Calculus of Variations, Princeton University Press 1988.

[Reifenberg,1960] Reifenberg,Solution of the Plateau problem for mdimensional surfaces of Varying topological type,ActaMath.104(1960),1-92.

[Federer,1969] FH.Federer,Geometric Measure Theory,Springer-Verlag, New York,1969.

[Federer,1970] FH.Federer,The singular sets of area minimizing rectifiable currents with Codimension one and of area minimizing flat chains modulo two with arbitary.

[Morrey,1966] MoC.B.Morrey,Mutiple integrals in the calculus of variations,Springer-Verlag,New York,1966.

[do Carmo,1976] do Carmo,M.P,1976.Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall International,Englewood Cliffs,NJ.

[Con,1967] P.Concus,Numerical solution of the minimal surface equation, Math. Comput.21(1967),340-350.

[Farin,Hansford,1999] Discrete Coons patches.Computer Aided Geometric Design 16(1999)691-700.

[PP,1993] U.Pinkall &K.Polthier.Computing discrete minimal surface and their Conjugates.Exp,Math,2(1):1993,15-36.

[Tsu,1986] T.Tsuchiya,On two methods for approximating minimal surfaces in Parametric form.Math.Comp.46 (174),1986 517-529.

[WW,1961] L.Walter & JR.Wilson, On discrete Dirichlet and Plateau problem, Numer.Math.3(1961), 359-373.

[Hut,1991] Hutchinson,J.E.Computing conformal maps and minimal surfaces. Proc.Centr.Math.Anal.Canberra,26(1991),140-161.

[DH,1999] G.Dziuk & J.E.Hutchinson,The discrete Plateau problem,

Math.Comp.68(225) 1-23,1999.

[Monterde,2003] Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach, Computer Aided Geometric Design 21(2004)117-136.

[Monterde,Ugail,2004] On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. Computer Aided Geometric Design.

[Monterde,Ugail,2005] A general 4th-order PDE method to genetate Bézier surfaces from the boundary.Computer Aided Geometric Design 23(2006)208-225.

[Dietz,Piper,Sebe,2007] Rational cubic spirals,Computer-Aided Design 40(2008)3-12.

[PDAK,1999] F.Paul, C.Djurdje, L.Alan, J.Klionowski, Exact computation of the triply periodic minimal surface, Chemical Physics Letters 314 (5-6),543-551,1999.

[Man ,Wang 2003] Man J-J,Wang G-Z, 2003. Approximating to nonparameterzied minimal surface with B-spline surface. Journal of Software 14(4),824-829. In Chinese.

[Cia, 1978] P.G.Ciaret, The Finite element method for elliptic problems,North Holland,1978.

[PDAK, 1999] F.Paul, C.Djurdje, L.Alan, J.Klinowski, Exact computation of the triply periodic minimal surface, Chemical Physics Letters 314(5-6), 543-551, 1999.

[Z, M,1983] O.C.Zienkiewiez, K.M.Morgan, Finite elements and approxi- mation,1983,John Wiley and Sons,Inc.

[BW,1990] M.G.Bloor and M.J.Wilson, Representing PDE Surfaces in Terms of B-Splines,Computer Aided Design, vol.22,no.6,1990,324-331.

[CCA, 1991] Cox, J., Charlesworth, w., Anderson, D., Domain Composition Methods For Associating Geometric Modeling with Finite Element Modeling, Proceeding of the ACM/ Siggraph, Symposium on Solid Modeling Foundation and CAD/CAM application, Austin, TX, June,5-7,1991.

[VSBJ, 1998] Volpin, O; Sheffer, A; Bercovier, M; Joskowicz, L, Mesh

simplification with smooth surface reconstruction, CAD 30(11), 1998, 875-882.

[P J E R,2009] P.Centella, J.Monterde, E.Moreno and R.Oset:Two C^1-methods to generate Bézier surfaces from the boundary. Computer Aided Geometric Design 26(2009)152-173.

[Monterde,2001] J.Monterde.Singularities of rational Bézier curves. Computer Aided Geometric Design 18(2001)805-816.

[WGJ,WGZ,ZJM,2001] 王国瑾，汪国昭，郑建民著，计算机辅助几何设计，2001，高等教育出版社，斯普林格出版社.

[Xu,Wang,2006] 徐岗，汪国昭，三角域上的调和 BB 曲面，杭州，浙江大学计算机学报，2006.

[Xu,2008] 徐岗，CAD 系统中的极小曲面及其优化方法的研究，杭州，浙江大学，博士毕业论文，2008.

[Xu,Wang,2007] 徐岗，汪国昭，PDE 曲面的 Bézier 逼近，杭州，浙江大学数学系计算机图形图像研究所.

[Chen,2006] 陈笑，2006 有理 Bézier 极小曲面设计：Dirichlet 方法的推广.

[Jiang,Pang,1982] 姜礼尚，庞之垣著，有限元方法及其理论基础，1982，人民教育出版社.

[Jin, 1999] 金文标, 若干特殊曲面的造型和应用, 杭州, 浙江大学, 博士论文, 1999.

[Man,Wang, 2003] 满家巨，汪国昭，2003 基于有限元方法的极小曲面造型，计算机学报.

[Mei, Huang,2003] 梅向明，黄敬之著，微分几何,2003，高等教育出版

[Wu, Xu，2004] 武岳 ，胥传喜，2004 膜结构的形状确定与建筑功能要求，工业建筑.

致谢

首先要深深感谢我的导师王国瑾教授，王老师为人和蔼，治学严谨，思路清晰，他的人格魅力时时感染着我，是我研究和生活的灯塔. 他对我的谆谆教导，让我在专业知识上有了更多的积累，当我在学习的过程中遇到挫折时，王老师总是耐心的鼓励我，指导我. 值此论文完成之际，谨向我的导师致以深深的敬意和诚挚的谢意！

诚挚感谢 CAGD 课题组的吴花精灵，黄伟贤，王宗政等同学，他们对于我论文的顺利完成给予了支持和鼓励.

真心感谢我的父母，他们给予我无私的爱和莫大的支持，正是由于他们深切的关怀使我能够顺利完成学业.

最后，要感谢评议硕士论文和出席硕士论文答辩委员会的各位专家学者，感谢你们在百忙工作中能抽出时间给予指导.

谨向所有关心和帮助过我的人们致以诚挚的谢意！

苏盼

2010 年 5 月求是园